

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷）

理科数学

注意事项：

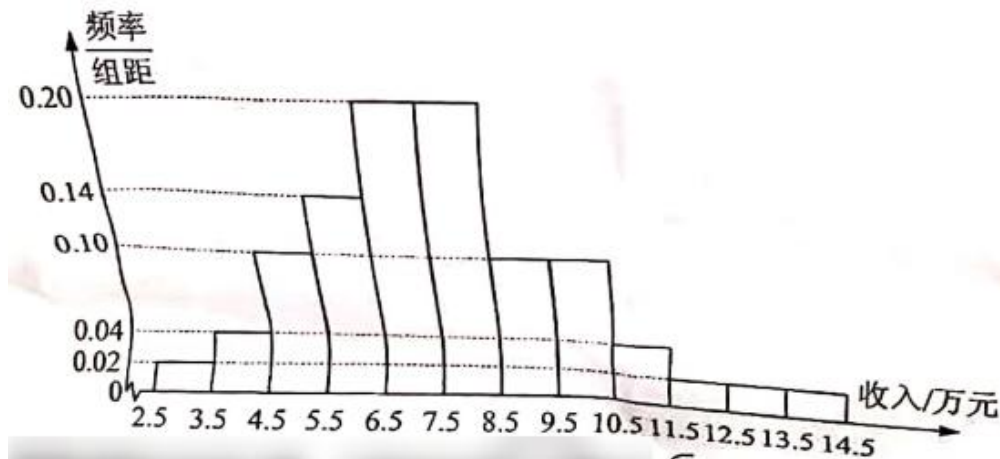
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x \leq 5 \right.\right\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A . $\left\{x \left| 0 < x \leq \frac{1}{3} \right.\right\}$ B . $\left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x < 4 \right.\right\}$ C . $\{x | 4 \leq x < 5\}$
D . $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是 ()

- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
D. 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知 $(1-i)^2 z = 3 + 2i$, 则 $z =$ ()

- A. $-1 - \frac{3}{2}i$ B. $-1 + \frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2} + i$ D. $-\frac{3}{2} - i$

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 的满足

$L = 5 + \lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据为

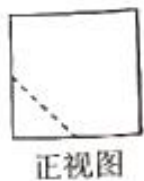
() ($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ, |PF_1| = 3|PF_2|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如右图所示, 则相应的侧视图是 ()

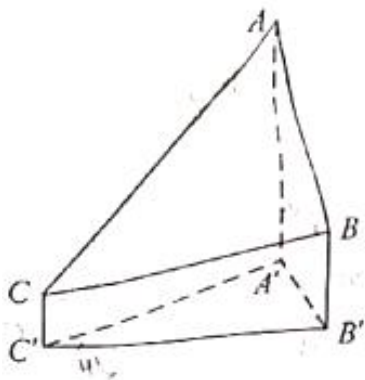


- A. B. C. D.

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15° , BB' 与 CC' 的差为 100; 由 B 点测得 A 点的仰角为 45° , 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 ($\sqrt{3} \approx 1.732$) ()



- A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

9. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

11. 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC, AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时,

$f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) =$ ()

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

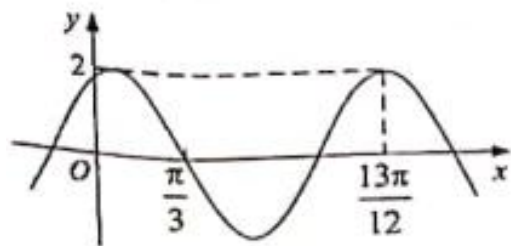
13. 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.

14. 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 1), \mathbf{b} = (1, 0), \mathbf{c} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}$. 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $k =$ _____.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件

$\left(f(x) - f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x) - f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) > 0$ 的最小正整数 x 为_____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

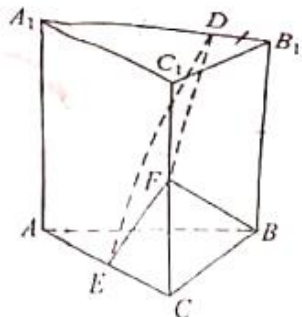
已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

19. (12 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.



(1) 证明: $BF \perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?

20. (12 分)

抛物线 C 的顶点为坐标原点 O . 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 $C, \odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

21. (12 分)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

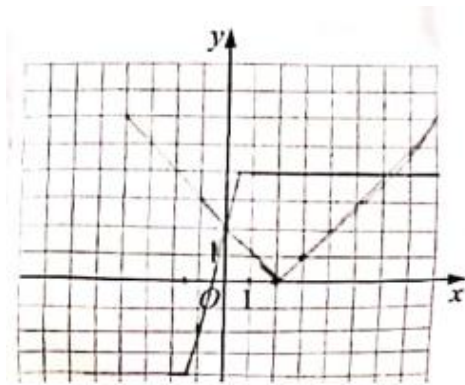
在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.



(1) 画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷） 理科数学参考答案

一、选择题

1. B 2. C 3. B 4. C 5. A 6. D 7. B 8. B 9. A 10. C 11. A 12. D

二、填空题

13. $5x - y + 2 = 0$

14. $-\frac{10}{3}$.

15. 8

16. 2

三、解答题

（一）必考题

17. （1）75%；60%；

（2）能.

18. [方法一]：待定系数法+ a_n 与 S_n 关系式

设 $\sqrt{S_n} = an + b (a > 0)$ ，则 $S_n = (an + b)^2$ ，

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = (a + b)^2$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = (an + b)^2 - (an - a + b)^2 = a(2an - a + 2b)$ ；

因为 $\{a_n\}$ 也是等差数列，所以 $(a + b)^2 = a(2a - a + 2b)$ ，解得 $b = 0$ ；

所以 $a_n = a^2(2n - 1)$ ， $a_1 = a^2$ ，故 $a_2 = 3a^2 = 3a_1$ 。

[方法二]：待定系数法

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等差数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 d_1 ，

则 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n - 1)d_1$ ，将 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 代入 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n - 1)d_1$ ，

化简得 $\frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = d_1^2n^2 + (2\sqrt{a_1}d_1 - 2d_1^2)n + (\sqrt{a_1} - d_1)^2$ 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立。

$$\text{则有 } \begin{cases} d = 2d_1^2, \\ 2a_1 - d = 4\sqrt{a_1}d_1 - 4d_1^2, \\ \sqrt{a_1} - d_1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } d_1 = \sqrt{a_1}, d = 2a_1. \text{ 所以 } a_2 = 3a_1.$$

选①③作条件证明②:

因为 $a_2 = 3a_1$, $\{a_n\}$ 是等差数列,

所以公差 $d = a_2 - a_1 = 2a_1$,

$$\text{所以 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2a_1, \text{ 即 } \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1}n,$$

$$\text{因为 } \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1}(n+1) - \sqrt{a_1}n = \sqrt{a_1},$$

所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

选②③作条件证明①:

[方法一]: 定义法

$$\text{设 } \sqrt{S_n} = an + b (a > 0), \text{ 则 } S_n = (an + b)^2,$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = (a+b)^2;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = (an+b)^2 - (an-a+b)^2 = a(2an-a+2b);$$

$$\text{因为 } a_2 = 3a_1, \text{ 所以 } a(3a+2b) = 3(a+b)^2, \text{ 解得 } b=0 \text{ 或 } b = -\frac{4a}{3};$$

当 $b=0$ 时, $a_1 = a^2, a_n = a^2(2n-1)$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n - a_{n-1} = 2a^2$ 满足等差数列的定义, 此时 $\{a_n\}$ 为等差数列;

$$\text{当 } b = -\frac{4a}{3} \text{ 时, } \sqrt{S_n} = an + b = an - \frac{4}{3}a, \sqrt{S_1} = -\frac{a}{3} < 0 \text{ 不合题意, 舍去.}$$

综上所述 $\{a_n\}$ 为等差数列.

[方法二] 【最优解】: 求解通项公式

因为 $a_2 = 3a_1$, 所以 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$, $\sqrt{S_2} = \sqrt{a_1 + a_2} = 2\sqrt{a_1}$, 因为 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也为等差数列, 所以

公差 $d_1 = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$, 所以 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d_1 = n\sqrt{a_1}$, 故 $S_n = n^2a_1$, 当 $n \geq 2$ 时,

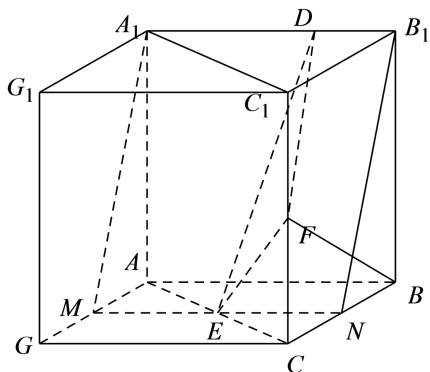
$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2a_1 - (n-1)^2a_1 = (2n-1)a_1, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, 满足上式, 故 } \{a_n\} \text{ 的通项公}$$

式为 $a_n = (2n-1)a_1$, 所以 $a_{n-1} = (2n-3)a_1$, $a_n - a_{n-1} = 2a_1$, 符合题意.

19. (1)

因为 $BF \perp AB_1, AB_1 \parallel AB$, 所以 $BF \perp AB$.

又因为 $AB \perp BB_1$, $BF \cap BB_1 = B$, 所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 . 又因为 $AB = BC = 2$, 构造正方体 $ABCG - A_1B_1C_1G_1$, 如图所示,



过 E 作 AB 的平行线分别与 AG , BC 交于其中点 M, N , 连接 A_1M, B_1N ,

因为 E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, 所以 N 是 BC 的中点,

易证 $\text{Rt}\triangle BCF \cong \text{Rt}\triangle B_1BN$, 则 $\angle CBF = \angle BB_1N$.

又因为 $\angle BB_1N + \angle B_1NB = 90^\circ$, 所以 $\angle CBF + \angle B_1NB = 90^\circ$, $BF \perp B_1N$.

又因为 $BF \perp A_1B_1, B_1N \cap A_1B_1 = B_1$, 所以 $BF \perp$ 平面 A_1MNB_1 .

又因为 $ED \subset$ 平面 A_1MNB_1 , 所以 $BF \perp DE$.

$$(2) \quad B_1D = \frac{1}{2}$$

20. (1) 抛物线 $C: y^2 = x$, $\odot M$ 方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$;

(2) 相切

设 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

若 A_1A_2 斜率不存在, 则 A_1A_2 方程为 $x=1$ 或 $x=3$,

若 A_1A_2 方程为 $x=1$, 根据对称性不妨设 $A_1(1, 1)$,

则过 A_1 与圆 M 相切的另一条直线方程为 $y=1$,

此时该直线与抛物线只有一个交点, 即不存在 A_3 , 不合题意;

若 A_1A_2 方程为 $x=3$, 根据对称性不妨设 $A_1(3, \sqrt{3}), A_2(3, -\sqrt{3})$,

则过 A_1 与圆 M 相切的直线 A_1A_3 为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$,

$$\text{又 } k_{A_1A_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{1}{y_1 + y_3} = \frac{1}{\sqrt{3} + y_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y_3 = 0,$$

$x_3 = 0, A_3(0, 0)$, 此时直线 A_1A_3, A_2A_3 关于 x 轴对称,

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

若直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 斜率均存在，

$$\text{则 } k_{A_1A_2} = \frac{1}{y_1 + y_2}, k_{A_1A_3} = \frac{1}{y_1 + y_3}, k_{A_2A_3} = \frac{1}{y_2 + y_3},$$

$$\text{所以直线 } A_1A_2 \text{ 方程为 } y - y_1 = \frac{1}{y_1 + y_2}(x - x_1),$$

$$\text{整理得 } x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{同理直线 } A_1A_3 \text{ 的方程为 } x - (y_1 + y_3)y + y_1y_3 = 0,$$

$$\text{直线 } A_2A_3 \text{ 的方程为 } x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0,$$

$$\because A_1A_2 \text{ 与圆 } M \text{ 相切}, \therefore \frac{|2 + y_1y_2|}{\sqrt{1 + (y_1 + y_2)^2}} = 1$$

$$\text{整理得 } (y_1^2 - 1)y_2^2 + 2y_1y_2 + 3 - y_1^2 = 0,$$

$$A_1A_3 \text{ 与圆 } M \text{ 相切, 同理 } (y_1^2 - 1)y_3^2 + 2y_1y_3 + 3 - y_1^2 = 0$$

所以 y_2, y_3 为方程 $(y_1^2 - 1)y^2 + 2y_1y + 3 - y_1^2 = 0$ 的两根，

$$y_2 + y_3 = -\frac{2y_1}{y_1^2 - 1}, y_2 \cdot y_3 = \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1},$$

M 到直线 A_2A_3 的距离为：

$$\frac{|2 + y_2y_3|}{\sqrt{1 + (y_2 + y_3)^2}} = \frac{|2 + \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1}|}{\sqrt{1 + (-\frac{2y_1}{y_1^2 - 1})^2}}$$

$$= \frac{|y_1^2 + 1|}{\sqrt{(y_1^2 - 1)^2 + 4y_1^2}} = \frac{y_1^2 + 1}{y_1^2 + 1} = 1,$$

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

综上若直线 A_1A_2, A_1A_3 与圆 M 相切，则直线 A_2A_3 与圆 M 相切。