河北衡水中学

高二数学

数学

积累

高二年级

选修2-3

马彤

巩固

证明

应用

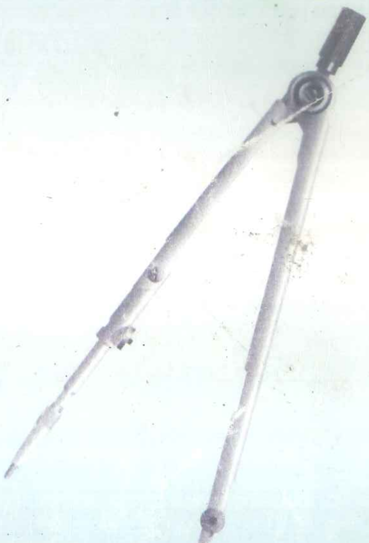
归纳

性质

类比

概念

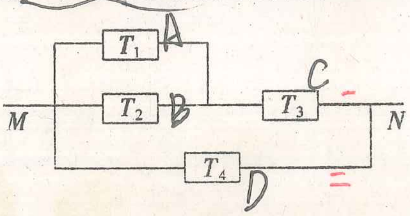
实验



12月23日　问题与积累　反思

2.2.2 事件的相互独立性

5. 如图，由M到N的电路中有4个元件，分别标为T_1，T_2，T_3，T_4，电流能通过T_1，T_2，T_3的概率都是p，电流能通过T_4的概率是0.9. 电流能否通过各元件相互独立. 已知T_1，T_2，T_3中至少有一个能通过电流的概率为0.999.



(1) 求p；

(2) 求电流能在M与N之间通过的概率.

(1) $(1-p)^3=1-0.999$

$p=0.9$

(2) 第一条不通 $P(\bar{D})=0.1$

第一条不通　间接法　第一条通 ⇒

T_1T_2保证有至少一个通 间接 $(1-P(\bar{A})P(\bar{B}))P(C)$

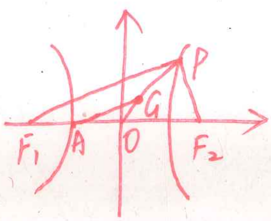
$P=1-[1-(1-P(\bar{A})P(\bar{B}))P(C)]P(\bar{D})=0.9891$

3、已知A是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点，$F_1,F_2$分别为双曲线的左、右焦点，$P$为双曲线上一点，$G$是$\Delta PF_1F_2$的重心，若$\overrightarrow{GA}=\lambda\overrightarrow{PF_1}$，则双曲线的离心率为　B

分中线为1:2

$GA // PF_1$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 与λ的取值有关



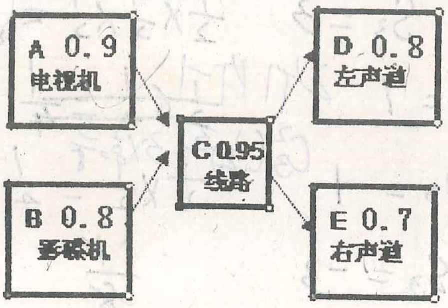
$\triangle AGO // \triangle F_1PO$

$\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$

问题与积累	反思

6. 已知某音响由五部件组成，能听到声音，当且仅当A.B中有一个工作，C工作，D与E中有一个工作.

，E 中有一个工作；且若 D 和 E 同时工作则有立体声效果.



（1）求能听到立体声效果的概率；≈0.52

（2）求听不到声音的概率.（结果精确到 0.01）0.13

(1) $\underbrace{(1-0.1\times0.2)}_{A\ B工作}\times0.95\times0.8\times0.7\approx0.52$

(2) $1-(1-0.1\times0.2)\,0.95\,(1-0.2\times0.3)\approx0.13$

间接法

问题与积累	反思

2. 一种电脑屏幕保护画面，只有符号"O"和"X"随机地反复出现，每秒钟变化一次，每次变化只出现"O"和"X"之一，其中出现"O"的概率为p，出现"X"的概率为q，若第k次出现"O"，则记 $a_k=1$；出现"X"，则记 $a_k=-1$，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(1) 当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，求 S_3 的分布列.

(2) 当 $p=\frac{1}{3},q=\frac{2}{3}$ 时，求 $S_8=2$ 且 $S_i\geq 0(i=1,2,3,4)$ 的概率.

(1)

$S_3=3$　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

2个1 1个-1

$S_3=1$　$C_3^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

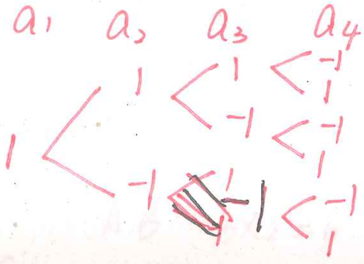
$S_3=-1$　$C_3^2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$

$S_4=-3$　$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

S_3	3	1	-1	-3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2)

只可以是5个1 3个-1



1> 4个1 1种　$C_4^1(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^2$

另外4个哪个为1

2> 3个1 3种

列举

$C_4^2\times3\times(\frac{1}{3})^5\times(\frac{2}{3})^2$

3> 2个1 2种

$C_4^3\times2\ (\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^2$

问题与积累	反思

16. 某工厂为了保障安全生产，每月初组织工人参加一次技能测试．甲、乙两名工人通过每次测试的概率分别是$\frac{4}{5}$和$\frac{3}{4}$．假设两人参加测试是否通过相互之间没有影响．

(1) 求甲工人连续3个月参加技能测试至少有1次未通过的概率；

(2) 工厂规定：工人连续2次没通过测试，则被撤销上岗资格．求乙工人恰好参加4次测试后被撤销上岗资格的概率．

(2)

_ ✓ × ×　第一次不确定 $P=1\times\frac{3}{4}\times(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$

求n为何值时　$0.8^n\le 0.1$

$(\frac{4}{5})^n\le\frac{1}{10}$　　$n\ge\frac{-1}{3\lg2-1}$

$n\lg\frac{4}{5}\le -1$　　$n\ge\frac{1}{1-3\lg2}$

$n\lg\frac{8}{10}$

用对数解指数

$(1+x+x^2)(x^2+\frac{1}{x})^6$的展开式中的常数项为 35

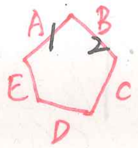
$T_{r+1}=C_6^r x^{6-2r}$

切忌少情况

$6-2r=0$　$r=3$　20

$6-2r=-2$　$r=4$　对应x^2　15

3. 对一个凸五边形涂色每条边可染3种颜色中的一种，不允许邻边同色，则染色方法有 30 种



1> A B　$3\times2=6$

2>　C　D　E

1 < 2 — 3 ; 3 — 2

3 < 1 < 2 ; 3 ; 2 — 3

5

问题与积累	反思
3. 甲、乙两名篮球队员轮流投篮直至甲投中为止，设甲每次投篮命中的概率为0.4，乙投中的概率为0.6而且不受其他次投篮结果的影响，设投篮的轮数为X若甲先投，则$P(X=k)$等于（ B ） A. $0.6^{k-1}\times0.4$　　B. $0.24^{k-1}\times0.4$ 与乙投入否无关 C. $0.4^{k-1}\times0.6$　　D. $0.76^{k-1}\times0.24$ 用10个均匀材料做成的各面上分别标有数字1,2,3,4,5,6的正方体玩具，每次同时抛出，共抛5次，则至少有一次全部都是同一数字的概率是（ D ） 1－全不是同一个数字 $C_6^1(\frac{1}{6})^{10}$ 一次中出现10个点数均相同 $1-[1-C_6^1(\frac{1}{6})^{10}]^5$ 23/12 ☆ X服从二项分布 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 最大 $\begin{cases} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\geq C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \\ C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\geq C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}\end{cases}$ $(n+1)p-1\leq k\leq(n+1)p$	

12月25日 圣诞快乐！ 问题与积累	反思
4、一袋中装着5个白球，3个红球，现从袋中往外取球，每次取出一个，取出后记下球的颜色，然后放回，直到红球出现10次时停止，停止时，取球的次数为ξ，ξ是一个随机变量，则 $P(\xi=12)=$ (A B) (A) $C_{12}^{10}(\frac{3}{8})^{10}(\frac{5}{8})^2$　(B) $C_{11}^{9}(\frac{3}{8})^{10}(\frac{5}{8})^2$ (C) $C_{11}^{10}(\frac{3}{8})^{10}(\frac{5}{8})^2$　(D) $C_{12}^{9}(\frac{3}{8})^{10}(\frac{5}{8})^2$ 前11次中取9个红球 第12次取红球 下面关于 X～B(n, p) 的叙述： 1 p表示一次试验事件发生的概率； 2 n表示独立重复试验的总次数； 3 n=1时，二项分布退化为两点分布； 4 随机变量X的取值是小于等于n的所有正整数 X和n无必然联系 次数 正确的项数为 (D) C A. 1　B. 2　C. 3　D. 4 例4. 某自行车租借标准，不超过2小时免费，超过2小时部分每小时收费2元（不足1小时按1小时算），甲乙独立来租车，甲乙不超过2小时还车 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，两小时以上且不超过三小时 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，三小时以上不超四小时 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$。求租车费用之和小于6元的概率 0 甲 乙 2 甲 乙 $P=\overset{00}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}+\overset{02}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}+\overset{20}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}+\overset{04}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}+\overset{40}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}+\overset{22}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$ $=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$	用时均一致 不必考虑顺序

问题与积累	反思
5. 某车间有10台同类型的机床，每台机床配备的电动机功率为10千瓦，已知每台机床工作时，平均每小时实际开动12分钟，且开动与否是相互独立的。现因当地电力供应紧张，供电部门只提供50千瓦电力，这10台机床能够不因电力不足而无法工作的概率为多大？在一个工作班的8小时内，不能正常工作的时间大约是多少？ 设10台中实际开动的随机变量为X $X \sim B(10,p)$ $p=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$　$(X\le 5)$ $C_{10}^{0}(\frac{4}{5})^{10}+C_{10}^{1}(\frac{4}{5})^{9}(\frac{1}{5})+\cdots+C_{10}^{5}(\frac{4}{5})^{5}(\frac{1}{5})^{5}$ 正常工作 ≈ 0.994 $0.006\times 60\times 8=2.88(min)$ 独立重复试验满足的条件是 ①每次试验之间是相互独立的； ②每次试验只有发生和不发生两种情况 ③每次试验中发生的机会是均等的 每次试验的发生与否 不指结果 ④每次试验发生的事件是互斥的. (A)①②　(B)②③ (C)①②③　(D)①②④	

问题与积累	反思

离散随机变量的均值

5. 运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下：

X	0~6	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

现进行两次射击，以该运动员两次射击中最高环数作为他的成绩，记为 ξ.

(1) 求 ξ 的分布列；

(2) 求 ξ 的均值.

先7后8或先8后7

(1) $\xi=8$　$\underline{0.2\times0.3\times2}+0.3\times0.3$

$=0.21$

$\xi=9$　$0.3\times0.3+\underline{0.3\times0.5\times2}=0.39$

比9小的任意情况

$\xi=10$　$0.2\times0.2+0.2\times0.8\times2=0.36$

ξ	7	8	9	10
P	0.04	0.21	0.39	0.36

(2) $E(x)=7\times0.04+8\times0.21+9\times0.39+10\times0.36=9.07$

展开写避免少情况

切莫拿一个再随便乘.

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
10. 某地区试行高考考试改革：在高三学年中举行5次统一测试，学生如果通过其中2次测试即可获得足够学分升上大学继续学习，不用参加其余的测试，而每个学生最多也只能参加5次测试．假设某学生每次通过测试的概率都是$\frac{1}{3}$.每次测试通过与否互相独立．规定：若前4次都没有通过测试，则第5次不能参加测试． (1)求该学生考上大学的概率；　X次 (2)如果考上大学或参加完5次测试就结束，记该生参加测试的次数为X，求X的分布列．　若不够两次就一直参加	

前四次必有一次过才可进考第五次

(1) $P=1-\underbrace{C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

$=\frac{131}{243}$

(2)

$X=2$　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$X=3$　$\cancel{C_3^1}$　$C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

两种情况 $X=4$　$C_4^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{28}{81}$

$X=5$　$C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\cancel{\frac{48}{243}}\ \cancel{\frac{96}{243}}\ \frac{32}{81}$

$+C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{96}{243}$

P

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
例题 5（2013 新课标 1）一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件作检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n。如果 n=3，再从这批产品中任取 4 件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 n=4，再从这批产品中任取 1 件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验。 假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立 （1）求这批产品通过检验的概率；$\frac{3}{64}$ （2）已知每件产品检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为 X（单位：元），求 X 的分布列及数学期望。 $X=500$　$(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$　最后一个箱必定花钱 $X=800$　$C_4^3(\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　满足第一个时 $X=400$　第一次未合格 $C_4^0(\frac{1}{2})^4+C_4^1(\frac{1}{2})^4+C_4^2(\frac{1}{2})^4=\frac{11}{16}$ $\frac{25}{12}$	

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
18. 某学校举行知识竞赛，第一轮选拔共设有 A,B,C,D 四个问题，规则如下： ①每位参加者计分器的初始分均为 10 分，答对问题 A,B,C,D 分别加 1 分、2 分、3 分、6 分，答错任意一题减 2 分. ②每回答一题，计分器显示累计分数，当累计分数小于 8 分时，答题结束，淘汰出局；当累计分数大于或等于 14 分时，答题结束，进入下一轮；当答完四题，累计分数仍不足 14 分时，答题结束，淘汰出局. ③每位参加者按问题 A,B,C,D 顺序作答，直至答题结束. 假设甲同学对问题 A,B,C,D 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 且各题回答正确与否相互之间没有影响. (1)求甲同学能进入下一轮的概率； (2)用 ξ 表示甲同学本轮答题结束时答题的个数，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.	细分类
1) 设过第一、二、三、四轮的事件为 $A.B.C.D$ 第1) $P(ABC)=\frac{1}{8}$ 2) 前三道累计得分大于等于8分 第4道对 ① 三个只对两个 $P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})=\frac{5}{12}$ ② 三个只对一个 $P(\bar{A}B\bar{C})=\frac{1}{12}$　　前两个均错就直接淘汰 $P=\frac{1}{8}+(\frac{5}{12}+\frac{1}{12})\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ (2) 至第四关 $\xi=4$ $P=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ $\xi=3$ $P(ABC)+P(A\bar{B}\bar{C})=\frac{3}{8}$　$E(\xi)=\frac{27}{8}$ 答三个就过或淘汰	最少答前3道全对过关 因为前面错后不仅得不到还扣

ξ	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
一个篮球运动员投篮一次得 3 分的概率为 a，得 2 分的概率为 b，不得分的概率为 $c(a,b,c\in(0,1))$，已知他投篮一次得分的期望为 2，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}$ 的最小值为 …… $\frac{16}{3}$	
$3a+2b=2$　$(\frac{2}{a}+\frac{1}{3b})\times\frac{1}{2}(3a+2b)$ $=(6+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}$ $=(\frac{20}{3}+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b})\times\frac{1}{2}$ $=\frac{10}{3}+\underbrace{\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}}\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{a}{2b}}=2$ $=\frac{16}{3}$	分母有公共乘法
12月28日 ☺！	
1. 若 X 为离散型随机变量，则 $D(X-DX)$ 的值为 DX　1^2DX　数值	
周测　沉下心　力求体现自己水平	
1. 已知 $(1+x^2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7+a_8x^8$ 从集合 $M\{x\mid x=\frac{a_i}{a_j},x\in R\}$ $(i=0,1,2,\cdots 8;j=0,1,2,\cdots 8)$ 到集合 $N=\{-1,0,1\}$ 的映射个数 <u>6561</u>	3^8
$M\to N$ ★ M的任何一个元素在N中都有对应　M若集 $(1+x^2)^4=1+4x^2+6x^4+4x^6+x^8$ $a_4=6$　$a_0=a_8=1$　$a_2=a_6=4$　$a_1=a_3=a_5=a_7=0$ $M=\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{4},4,6,\frac{2}{3},\frac{3}{2},1\}$ 有三种选择	

问题与积累	反思
例2. 袋子A和B中装有若干个均匀的红球和白球，从A中摸出一个红球的概率是$\frac{1}{3}$，从B中摸出一个红球的概率为p. （1）从A中有放回地摸球，每次摸出一个，有3次摸到红球即停止： ①求恰好摸5次停止的概率；$C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$ ②记5次之内（含5次）摸到红球的次数为X，求随机变量X的分布列及数学期望EX. （2）若A，B两个袋子中的球数之比为1:2，将A，B中的球装在一起后，从中摸出一个红球的概率是$\frac{2}{5}$，求p的值. $\frac{12}{30}$ 设球数 ② $X=0$　$(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}$ $X=1$　$C_5^1(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}=\frac{80}{243}$ $X=2$　$C_5^2(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2=\frac{80}{243}$ 包含三种情况 $X=3$　摸了5次　摸4次　三次直接停止 $C_4^2(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^3$	均要符合主题干要求

X	0	1	2	3
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{51}{243}$

2. 将三个骰子各掷一次　A="三个点数都不同"，B"至少出现一个6点"，条件概率 $P(A\|B)=$ $\frac{60}{91}$

$P(B\|A)=$ $\frac{1}{2}$　$n(A)=6\times5\times4=120$

$n(B)=6^3-5^3=91$　$n(AB)=C_3^1\times5\times4=60$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
$-1-\frac{a}{2}<x<-1+\frac{a}{2}$ A 9. 已知 $f(x)=2x+3\ (x\in R)$ 若 $\lvert f(x)+1\rvert<a$ 的必要条件是 $\lvert x+1\rvert<b\ (a,b>0)$ 则 a,b 间关系为 $b\geq\frac{a}{2}$ B: $-1-b<x<-1+b$ $\boxed{A}$ B　$A\Rightarrow B$ $\begin{cases}-1-b\leq-1-\frac{a}{2}\\-1+\frac{a}{2}\leq-1+b\end{cases}$　$b\geq\frac{a}{2}$ $-1-b$　$-1-\frac{a}{2}$　$-1+\frac{a}{2}$　$-1+b$	看清谁是谁条件
11. 命题 p：若 $a>1$，则 $a^x>\log_a x$ 恒成立；q：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ (x>0)\\e^x\ (x\leq0)\end{cases}$ 若 $F(x)=f(x)+x$，$x\in R$，则 $F(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ 则 p 为 假命题 q 为 真命题 p　$x\leq0$ 时 $\log_a x$ 无意义 但未说 x 的范围 q. $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+x\ (x>0)\\e^x+x\ (x\leq0)\end{cases}$　$\frac{1}{x}+x\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ e^x+x 单调递增　$F(x)\leq F(0)$　$F(x)\leq1$	
12. 给定 p：已知 $\ln a>\ln b$，若 $c>0$，则 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$；q： $a>b\ \because a>0\ b>0\ \therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 命题“若 $x\in(1,+\infty)$，则 $e^x>x+1$”的否命题是“若 $x\in(1,+\infty)$，则 $e^x\leq x+1$”，真命题是 p 条件、结论全否	区分于命题的否定

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

已知5只动物中有1只患有某种疾病，需要通过化验血液来确定患病的动物．血液化验结果呈阳性的即为患病动物，呈阴性的即没患病．下面是两种化验方法：

方案甲：逐个化验，直到能确定患病动物为止．

方案乙：先任取3只，将它们的血液混在一起化验．若结果呈阳性则表明患病动物为这3只中的1只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外2只中任取1只化验．

（Ⅰ）求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

（Ⅱ）ξ表示依方案乙所需化验次数，求ξ的期望．

1) 设甲实验次数为随机变量η

η　1　2　3　4　事件变

P　0.2　0.2　0.2　0.4

$\eta=3$

$\frac{A_4^2A_1^1}{A_5^3}$

$\xi=2$　1) 前三只无病

$\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{2}{5}$

2) 前三次有病，第一个有病

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

ξ　2　3

P　$\frac{3}{5}$　$\frac{2}{5}$

$P=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times1+\frac{2}{5}$

$=\frac{3}{25}+\frac{3}{5}$

$=\frac{18}{25}$

$E(\xi)=\frac{12}{5}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
4. 春节将至，要安排从正月初一至正月初六由指定的六位领导参加的值班表．要求每一位领导值班一天，但校长甲与校长乙不能相邻且主任丙与主任丁也不能相邻，则共有多少种不同的 336	间接法

$A_6^6-\underbrace{A_2^2A_5^5\times 2}_{\text{甲乙相邻或丙、丁相邻}}+\underbrace{A_2^2A_2^2A_4^4}_{\text{甲乙且丙丁均邻}}$

6. 某单位安排 7 位员工在 10 月 1 日至 7 日值班，每天 1 人，每人值班 1 天，若 7 位员工中的甲、乙排在相邻两天，丙不排在 10 月 1 日，丁不排在 10 月 7 日，则不同的安排方案共有（ C ）A. 504 种　B. 960 种　C. 1008 种　D. 1108 种

A_2^2

1)

$\cancel{A_2^2A_5^5\times 2}$　$\underbrace{A_4^1}_{\text{找人补1日或}}\times A_4^4\times 2$

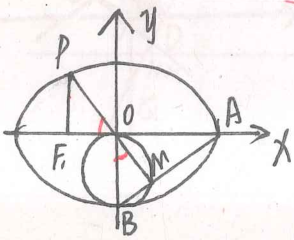
2)

在其余三人中找一人排10月7日

$4\times A_2^2(\underbrace{A_4^4}_{\text{丙排10月7日}}+\underbrace{A_3^1C_3^1A_3^3}_{\text{丙排除1日外3天}})$

6/1

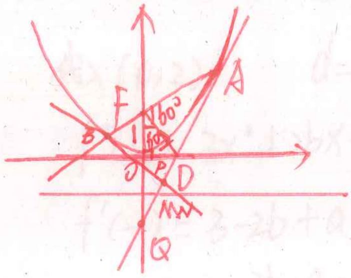
积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
二项式系数中找有负项中最大项 先找绝对值最大项 再找附近正项 五调 如图，设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$为椭圆左焦点，过点$F_1$作$x$轴的垂线交椭圆于点$P$(位于$x$轴上方)，点$A,B$分别为椭圆长轴和短轴的一个端点，以$OB$为直径的圆交线段$AB$于$M$，且$P,O,M$三点共线. (1)设$c=\sqrt{a^2-b^2}$，试比较$b$与$c$的大小； (2)是否存在这样的椭圆，使$\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\rangle=30°$？若存在，求出椭圆的方程；若不存在，说明  (1) $P(-c,\frac{b^2}{a})$　$\overrightarrow{AB}=(-a,-b)$ $\because OM\perp AB$ 且P、OM共线 $\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $\therefore ac-\frac{b^3}{a}=0$　$a^2=\frac{b^2}{c}b$ $a^2c=b^3$　$\because a^2>b^2$ $\therefore \frac{b}{c}>1$　$\therefore b>c$ (2) $\tan\angle POF_1=\tan60°=\frac{b^2}{ac}=\sqrt{3}$ $\therefore b^2=\sqrt{3}ac$ 由(1)问可知 $a^2c=b^3$ $\therefore a=\sqrt{3}b$　$b=3c$　$\therefore c=\frac{a}{3\sqrt{3}}$ $\therefore b^2+c^2=\frac{10}{27}a^2\neq a^2$ $\therefore$不存在这样的椭圆	

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线上一点 A 的横坐标为 $x_1(x_1>0)$，过点 A 作抛物线 C 的切线 l_1 交 x 轴于点 D，交 y 轴于点 Q，交直线 $l:y=\frac{p}{2}$ 于点 M，当 $\|FD\|=2$ 时，$\angle AFD=60°$. (1)求证：$\triangle AFQ$ 为等腰三角形，并求抛物线 C 的方程； (2)若直线 AF 和抛物线 C 交于另一点 B，过点 B 作抛物线 C 的切线 l_2 交直线 l_1 于点 P，交直线 l 于点 N，求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.	



(1) 设 $A(x_1,y_1)$

$$\begin{cases} x^2=2py \\ y=k(x-x_1)+\frac{x_1^2}{2p} \end{cases}$$

两点式

$$\frac{x^2}{2p}=kx-kx_1+\frac{x_1^2}{2p}$$

$$x^2-2pkx+2pkx_1-x_1^2=0$$

$\Delta=0$　$(pk-x_1)^2=0$

∴ 切线 l_1 为 $y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$ ∴ $k=\frac{x_1}{p}$

∴ $D(\frac{x_1}{2},0)$　$Q(0,y_1)$　∴ $|FQ|=\frac{p}{2}+y_1$　$|FA|=\frac{p}{2}+y_1$

∴ $|FQ|=|FA|$　∴ $\triangle AFQ$ 为等腰△　∴ D 为 AQ 中点

在 $\triangle OFD$ 中　∵ $|FD|=2$ ∴ $OF=1$　∴ $\frac{p}{2}=1$　∴ $x^2=4y$

(2) 设 $B(x_2,y_2)$　∴ 切线 l_B $\begin{cases} y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4} \\ y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4} \end{cases}$

$P(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4})$　$\begin{cases} y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4} \\ y=1 \end{cases}$　$M(\frac{x_1}{2}+\frac{2}{x_1},1)$

同理 $N(\frac{x_2}{2}+\frac{2}{x_2},1)$

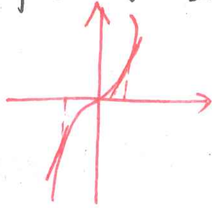
平时多努力一分，考试多收获一分！

∴ $S=\frac{1}{2}|MN|(1-\frac{x_1x_2}{4})=\frac{(x_2-x_1)^2(4-x_1x_2)^2}{16x_1x_2}$　$S=4\sqrt{k^2+1}$

设 AB 方程为 $\begin{cases} y=kx+1 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2-4kx-4=0$　$k=0$　$S_{min}=4$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
导数 24. 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+ax+d$ 的图象过点 P（0,2），且在点 M$(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$. 求函数 $y=f(x)$ 的解析式; 代入(0,2)　$d=2$　当 $x=-1$ 时 $-6-y+7=0$ $y=1$ $f'(x)=3x^2+2bx+a$ $f'(-1)=3-2b+a=6$ $2b-a=-3$ 代入(-1, 1)　$\therefore a=-3$ $-1+b-a+2=1$　$\therefore b=-3$ $b=a$ $\therefore f(x)=x^3-3x^2-3x+2$	切线与直线有公共点 有条理 一步步
1. 函数 $y=\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{常数}$ 的导数为 <u>0</u>	
2. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $y=f'(x)$ 是 <u>偶函数</u> $f'(x_0)=f'(-x_0)$ $f(x_0)=-f(x_0)$	
3. P在曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$ 上移动，设P处切线的倾斜角为 α，则 $\angle\alpha\in$ <u>$[0,\frac{\pi}{2})\cup[\frac{3}{4}\pi,\pi)$</u>　$y'=x^2-2x$　$y'\geq-1$ $y'_{min}=-1$ $x=\frac{-2}{-2}=1$	$\alpha\in[0,\pi)$



平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
4. 在函数 $f(x)=x^3-8x$ 的图象上，其切线的倾斜角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的点中，坐标为整数的点的个数是 0个 $f'(x)=3x^2-8$　　$k=\tan\alpha$ $0\le 3x^2-8<1$ $3x^2=8$　无整数解 过曲线外一点相切 求过点 $A(0,16)$ 且与曲线 $f(x)=x^3-3x$ 相切的直线方程 设这一点曲线上为 $(x_0, x_0^3-3x_0)$ $f'(x)=3x^2-3$ $\frac{x_0^3-3x_0-16}{x_0}=3x_0^2-3$ $3x_0^3-3x_0=x_0^3-3x_0-16$ $2x_0^3=-16$　$x_0=-2$　∴曲线上的点为 $(-2,-2)$ ∴ $k=9$　∴ $y=9x+b$ 代入 $(-2,-2)$　$b=16$ ∴ $y=9x+16$ 5. 曲线 $y=x^2+1$ 上过点P的切线与曲线 $y=-2x^2-1$ 相切，求切点P坐标 (x_1,y_1)　(x_2,y_2) $y_1'=2x$　$y'=2x$　$\cancel{(x_1,y_1)}$ $y_2'=-4x$　$\cancel{(y-y_1)=2x_1(x-x_1)}$ $\cancel{2x_1=y_1}$　$y=\cancel{2x_1x-2x_1^2}$ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-4x_2=2x_1$	$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ $\cancel{-2x_1^2-1=2x_1x-2x_1^2}$ $\cancel{2x^2+2x_1x-2x_1^2+1=0}$ $\cancel{\Delta=0}$

$x_1=-2x_2$　替换 x_2　$x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2x_2^2+2-x_1^2}{x_2-x_1}=2x_1$

$P\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$\cancel{4x_1^2-8(-2x_1^2+1)}$

$10x_1^2=84$

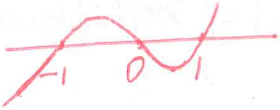
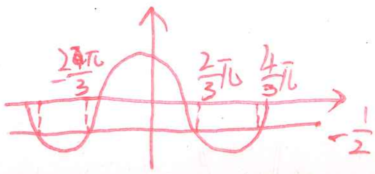
积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
6. 若函数 $y=x^3+2$，自变量从 $x=1$ 到 $x=a$ 时平均变化率为21，则 $a=$ $\underline{-5或4}$ $21=\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{3-a^3-2}{1-a}=\frac{1-a^3}{1-a}$ $a^3-21a+20=0$ $\quad$ $a^3-20a-a+20=0$ $20(1-a)+a(a^2-1)=0$ $(a-1)(a^2+a-20)=0$ $a=1$ $\quad$ $a=-5$或4	
7. 导数定义求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}}-1}{\Delta x}$ $=\frac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{1+\Delta x}}=\frac{(1-\sqrt{1+\Delta x})(1+\sqrt{1+\Delta x})}{\Delta x\sqrt{1+\Delta x}(1+\sqrt{1+\Delta x})}$ $=\frac{1-1-\Delta x}{\Delta x\sqrt{1+\Delta x}+\Delta x(\cancel{1+}\sqrt{1+\Delta x})}$ $=\frac{-1}{\sqrt{1+\Delta x}(1+\sqrt{1+\Delta x})}=-\frac{1}{2}$	让分母无 Δx 单独出现
8. 求导 $y=-2\sin\frac{x}{2}(1-2\cos^2\frac{x}{4})$ $=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$ $\quad$ $y'=\cos x$ $y=\cancel{2s}\ \sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ $\quad$ $(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4})^2=(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2})^2$ $=(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4})^2-\frac{2}{4}\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ $=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}$ $=\frac{1}{4}-\frac{1-\cos x}{4}=\cancel{\frac{1-2}{4}}$ $\quad$ $\cancel{\frac{1}{4}-\frac{\sin x}{2}}$	$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

$=\frac{\cos x}{4}$ $\quad$ $y'=-\frac{1}{4}\sin x$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
$y=\sin^2(2x-\frac{\pi}{3})$ $y=u^2$　$u=\sin v$　$v=2x-\frac{\pi}{3}$ $y'_x=v'_x\,u'_v\,y'_u$ $=2u\cos v\cdot 2$ $=4\sin v\cos v$ $=2\sin 2v$ $=2\sin(4x-\frac{2}{3}\pi)$ 函数单调性与导数正负　定义域优先 1. 求$f(x)=x^4-2x^2+3$的单调区间 $f'(x)=4x^3-4x$ $4x^3-4x>0$ $x^3-x>0$ $x(x^2-1)>0$ $x(x+1)(x-1)>0$  $(-1,0)$和$(1,+\infty)$↑ $(0,1)$　$(-\infty,-1)$↓ 2. $f(x)=\frac{x}{2}+\sin x$ $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$  $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2}{3}\pi+2k\pi)\ k\in Z$ ↑　$(\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\frac{4}{3}\pi+2k\pi)\ k\in Z$ ↓	单调区间不止一个，它们中间不能用"∪"连结，可用","或"和"字隔开

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

$f(x)=2x-\ln x$　$x>0$

$f'(x)=2-\frac{1}{x}$

$2-\frac{1}{x}>0$　$(0,\frac{1}{2})$ ↓

$\frac{1}{x}<2$　$(\frac{1}{2},+\infty)$ ↑

4. 有参数　$f(x)=\frac{ax}{1-x^2}$　$(a\neq0)(-1<x<1)$

$f'(x)=\frac{a(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$　$a>0$ ↑　$a<0$ ↓

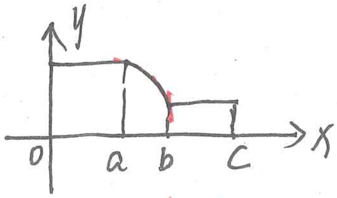
1. $y=f(x)$ 是定义域在 **R** 上的函数，则 $y=f(x)$ 为 **R** 上的单调增函数是 $f'(x)>0$ 的（ C ）B

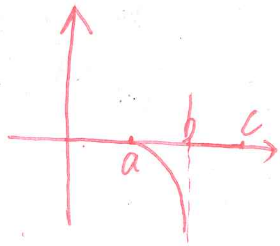
$f'(x)\geq0$

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. $f(x)$ 图象如图所示，画出导函数 $y=f'(x)$ 图象





切线斜率不断减小

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思

区分

★3. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间 (1,4) 内↓ 在 $(6,+\infty)$↑ 求a范围

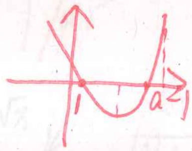
不仅有 (1,4) 区间是↓

$f'(x)\le 0$ 在 (1,4) 内恒成立　　$f'(x)\ge 0$ 在 $(6,+\infty)$ 内恒成立

$f'(x)=x^2-ax+a-1$

$=(x-1)[x-(a-1)]$

$(x-1)[(x-(a-1)]\le 0$



$a-1\ge 4$

$a-1\le 6$　　$\therefore 5\le a\le 7$

恒成立也可用分离变量

4. 已知函数 $f(x)=kx^3-3(k+1)x^2-k^2+1$ ($k>0$)，若 $f(x)$↓为 (0,4)，求k值

$f'(x)=3kx^2-6(k+1)x$

(0,4) 是函数唯一减区间

$f'(0)=0$　　$k=\pm1$

$f'(4)=0$　　$48k-24(k+1)=0$

$k=1$

5. 对于R上任意函数 $f(x)$ 若满足 $(x-1)f'(x)\ge 0$，则必有 $f(0)+f(2)$ $\underline{\ge}$ $2f(1)$

$x>1$　$f'(x)\ge 0$　↑

$x<1$　$f'(x)\le 0$　↓

$f(0)\ge f(1)$

$f(2)\ge f(1)$

问题与积累	反思

7. 设函数 $f(x)=e^x+x-2$，$g(x)=\ln x+x^2-3$，a、b 满足 $f(a)=0$，$g(b)=0$，比较 $g(a)$，$f(b)$，0 大小

$g(a)<0<f(b)$

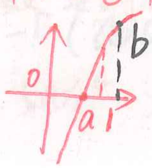
$f'(x)=e^x+1\ \uparrow$　$g'(x)=\frac{1}{x}+2x\ (x>0)\ \uparrow$

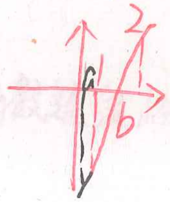
~~f(0)~~ $f(0)=-1<0$　$g(1)=-2<0$

$f(1)=e-1>0$　$f(2)=\ln 2+1>0$

试值

$0<a<1$　$1<b<2$





12. $f(x)=e^{-\sqrt{x}}\ \downarrow$ ~~$(0,+\infty)$~~ $[-\infty,1]$

定义域 $(0,+\infty)$

复合函数同增异减　$e^u\ \uparrow$　$-\sqrt{x}\ \downarrow$

13. $f(x)=\ln(1+a^{-2x})\ (a>0)$ 则 $f'(0)=$ $\underline{-\ln a}$

三层函数　$f'(x)=(\ln u)'(1+a^{v})'(-2x)'$

$=\frac{1}{u}a^v\ln a\times(-2)$

$=\frac{-2}{1+a^{-2x}}a^{-2x}\ln a$

$f'(0)=-\ln a$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
函数单调性(三)	

11. 已知$f(x)$是定义在R上的偶函数且连续，当$x>0$时，$f'(x)<0$，若$f(\lg x)>f(1)$，则x的取值范围 $(\frac{1}{10},10)$

$|\lg x|<1$

☆ 求含参数的函数单调区间 ≥ 0

12. ① $y=ax^5-1$ $(a>0)$ 单调性

$y'=5ax^4>0$　　0是函数连续性区间 包括0

看在$x=0$时图象是否连续

~~看导数是否连续~~

$(-\infty,+\infty)$上单增

② $\begin{cases} y=-\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ y=0 & x=0 \end{cases}$　$y'=\frac{1}{x^2}>0$

$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)\nearrow$　　0非连续

☆ 已知单调性求参数区间 ≥ 0　≤ 0

1) 求完导为二次 {分解因式 比较根的大小

不可分 {Δ 配方法　　2) 分式 通分后确定大小

14. 设$a>0$，求函数$f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$ $(x>0)$的单调区间

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x+a}$

$=\frac{x+a-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+a)}>0$

$h(x)=x+a-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2+a-1$

$x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x)=1-\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}$　　$f(x)>f(0)$

当$a\geq 1$时　$(0,+\infty)\nearrow$

当$a<1$时　$(\sqrt{x}-1)^2<1-a$

$|\sqrt{x}-1|<\sqrt{1-a}$

$1-\sqrt{1-a}<\sqrt{x}<1+\sqrt{1-a}$

$[(1-\sqrt{1-a})^2,(1+\sqrt{1-a})^2]\searrow$

$(0,(1-\sqrt{1-a})^2)$

$((1+\sqrt{1-a})^2,+\infty)$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

△类

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$，且 $f'(-1)=0$

求 $f(x)$ 单调区间

$f'(x)=x^2+2ax+b$

$\because f'(-1)=0$

$\therefore b=2a-1$

$\therefore f'(x)=x^2+2ax+2a-1$

$=(x+2a-1)(x+1)$

$(x+2a-1)(x+1)>0$　　1-2a　-1

① $a=1$ 时　~~$(x+1)$~~　$(x+1)^2>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 ↑

② $a>1$ 时　$(-\infty,1-2a)$，$(-1,+\infty)$ ↑

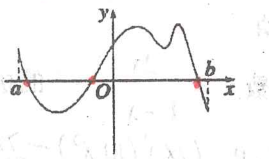
$(1-2a,-1)$ ↓

③ $a<1$ 时　$(-\infty,-1)$，$(1-2a,+\infty)$ ↑

$(-1,1-2a)$ ↓

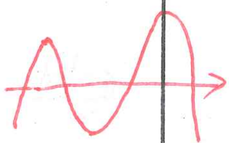
1.3.2 极值与导数　　函数 $f(x)$ 的极值点是 $f'(x)$ 的变号零点

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 (a,b)，$y=f'(x)$ 的图象如图，则函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内取得极小值的点有



（ B A ）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

三次函数理解

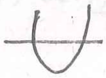
中心对称图象

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

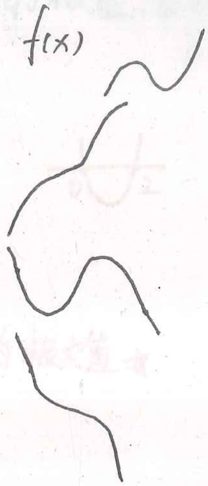
对称中心 导数零点的中点

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

1> $a>0$　$\Delta>0$

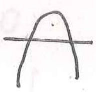


$f(x)$



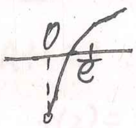
2> $a>0$　$\Delta\le 0$

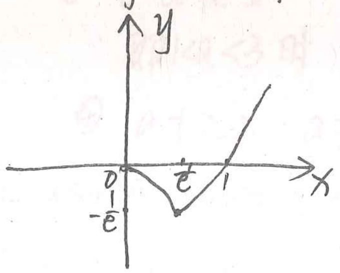
3> $a<0$　$\Delta>0$



4> $a<0$　$\Delta\le 0$

$x\ln x$　　$y'=\ln x+1$

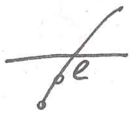


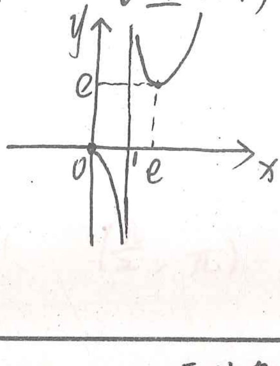


$x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ 极限0 洛必达法则

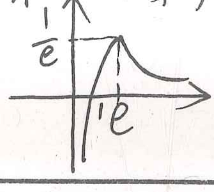
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}-x$

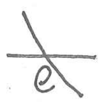
$\dfrac{x}{\ln x}$　$(x>0$ 且 $x\ne 1)$　$\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x+1}{\ln^2 x}$





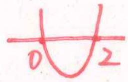
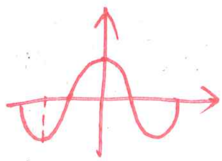
$\dfrac{\ln x}{x}$　$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$





平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
“函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为0”是“函数 $y=f(x)$ 在这点取得极值”的　（ B D ） A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件 C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件	前提未说 $f(x)$ 可导  不可导仍有极值
3. 求 $f(x)=x^3-3x^2-2$ 在 $(a-1,\ a+1)$ 内的极值，其中 $a>0$ $f'(x)=3x^2-6x$ $3x^2-6x=0$　$x(x-2)=0$ $x=0$ 或 2  ① $a-1<0$　$a+1>0$ 即 $0<a<1$ 0为极大值点，$f(0)=-2$ 为极大值 ② $a=1$ 时　无极值 ③ $0<a-1<2$　$a+1>2$ 即 $1<a<3$ 时　$f(2)=-6$ 为极小值 ④ $a-1\geq 2$　$a\geq 3$　无极值	讨论 a 的取值
1. $y=x\sin x+\cos x$，$x\in(-\pi,\pi)$ 的单调减区间是 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 和 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ $y'=\sin x+x\cos x-\sin x$ $=x\cos x$ 不清楚，可分段尝试  $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$　$y'>0$ $(-\frac{\pi}{2},0)$　$y'<0$ $(0,\frac{\pi}{2})$　$y'>0$ $(\frac{\pi}{2},\pi)$　$y'<0$	

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

2. ln|x| 的导函数为 $\underline{\frac{1}{x}}$

$$\begin{cases}\ln x & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}$$

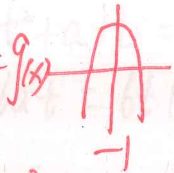
3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+1$ 在区间 $[-2,a]$ 上是单调函数，求a取范

☆ ⇒在区间范围内，恒大于0或恒小于0 恒 等于0

$f'(x)=x^2+2x+a$

① $x^2+2x+a\ge 0$ 在 $[-2,a]$ 上恒成立 分离变量

$a\ge \underline{-2x-x^2}=g(x)$



当 $-2<a\le -1$ 时 $g(x)_{max}=g(a)=-a^2-2a$

$a\ge -a^2-2a$

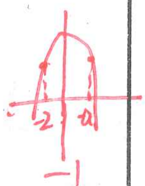
$a^2+3a\ge 0$　$a\le -3$ 或 $a\ge 0$ 无交集

当 $a>-1$ 时 $g(x)_{max}=g(-1)=1$

$\therefore a\ge 1$

② $x^2+2x+a\le 0$ 在 $[-2,a]$ 上恒成立

$a\le \underline{-2x-x^2}\,g(x)$　$a\le g(x)_{min}$



最小值一定在端点处

$$\begin{cases}a\le g(-2)\\ a\le g(a)\end{cases}$$

$\therefore$ $\cancel{a\ge 1}$

$\underline{-2<a\le 0}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

已知函数 $f(x)=x^3-x$

设 $a>0$，若过 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，

证明 $-a<b<f(a)$

切线有三个切点 $\Leftrightarrow$ 方有3个实数解

(a,b) 一定在切线上

$f'(x)=3x^2-1$

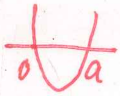
求 $f(x)$ 在 $(t,f(t))$ 处切线方程

得 $y=(3t^2-1)x-2t^3$

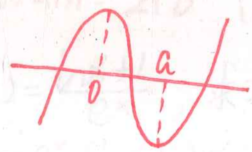
$b=(3t^2-1)a-2t^3$

$g(t)=2t^3-3at^2+a+b=0$

$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$



$g(t)$



$g(0)>0$

$g(a)<0$

$\begin{cases} a+b>0 \\ a+b-a^3=b-f(a)<0 \end{cases}$

$\therefore$ $b>-a$ 且 $f(a)>b$

$\therefore$ $f(a)>b>-a$

不能确定函数正负 求导看走势 找零点

数形结合

4. 已知 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$ 在 $x=-1$ 时有极值0，求 a,b 值

$f'(-1)=0$　　$a=1$ 或 2　　当 $a=1,b=3$ 时

$f(-1)=0$　　$b=3$ 或 9　　$f'(x)=3(x+1)^2\geq 0$

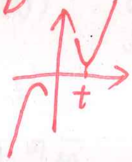
恒大于 无极值

$\therefore a=2\ b=9$

验证

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
例4 设 $f(x)=ae^x+\frac{1}{ae^x}+b\ (a>0)$ 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值 $\cancel{f(x)}$ $ae^x=t$　$\because x\in[0,+\infty)$ $f(t)=t+\frac{1}{t}+b$　$\therefore e^x\in[1,+\infty)$ $\therefore ae^x\in[a,+\infty)$ ① 存在 ~~当~~ $t=1$ 时 即 $a\in(0,1)$ 时　$f(t)=2+b$ ② 当 $a\geq1$ 时  $f(t)_{min}=f(a)=\frac{1}{a}+a+b$ $\therefore f(t)_{min}=2+b\quad(t=1)$	先求导不可行
已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$，求其单调区间 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^x-(\ln x+1)e^x}{(e^x)^2}$ $=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x+1)}{e^x}$ $=\frac{1-\ln x\,x-x}{e^x x}$ $\frac{1}{x}>\ln x+1$ $\frac{1-x}{x}>\ln x$ $\ln e^{\frac{1-x}{x}}>\ln x$ $e^{\frac{1-x}{x}}>x$ $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e}>x$ $e^{\frac{1}{x}}>ex$ $x=1$	直接代数

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

已知函数 $f(x)=x\ln x+\cancel{m}x$

(1) 设 $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x-1}$，讨论 $g(x)$ 单调性

$g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$　　$g'(x)=\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$　　$x>0$ 定义域

$h(x)=x-\ln x-1>0$　无法确定就二次求导

$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}\cancel{<0}>0$

$\therefore h(x)$ 递增　$g'(x)$

$\therefore(1,+\infty)$　$g'(x)>0$ ↑

$(0,1)$ ↓

(2) 已知 $m,n\in N^*$ 且 $m>n>1$，证明 $\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$

只需证 $\ln\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$

即 $\dfrac{1}{m}\ln n-\dfrac{1}{n}\ln m>\ln n-\ln m$

$\dfrac{n-1}{n}\ln m>\dfrac{m-1}{m}\ln n$　　$\dfrac{m}{m-1}\ln m>\dfrac{n}{n-1}\ln n$

与前问联系

由(2)问可知　$\therefore g(m)>g(n)$

$\therefore m>n$　$\therefore \dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$ 成立

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-ax$ 若 $a=1$，$g(x)=(x-m)f(x)-\frac{1}{4}e^{2x}+x^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↑， 求整数 m 最大值 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x$　$g(x)=(x-m)(\frac{1}{2}e^{2x}-x)-\frac{1}{4}e^{2x}+x^2+x$ $g'(x)=xe^{2x}-me^{2x}+m+1$ $g'(x)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立　＜分离变量 直接让其最小值满足要求 $xe^{2x}-me^{2x}+m+1\geq 0$ $m(\underbrace{1-e^{2x}}_{<0})\geq -1-xe^{2x}$ $m\leq\frac{-1-xe^{2x}}{1-e^{2x}}$ $m\leq\frac{1+xe^{2x}}{1+e^{2x}}=h(x)$ $h'(x)=\frac{e^{2x}(e^{2x}-3-2x)}{(e^{2x}-1)^2}$ $g(x)=e^{2x}-3-2x$ $g'(x)=2e^{2x}-2$ $=2(e^{2x}-1)>0$ 特殊值代入：$g(\frac{1}{2})<0$　$g(1)>0$　尽可能缩小范围 $\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一根 设为 a　$a\in(\frac{1}{2},1)$ $\boxed{g(a)=0=e^{2a}-3-2a}$ $g(x)$ $\frac{0}{\ a}$　$x\in(0,a)$　$g(x)<0$　$h'(x)<0\Rightarrow h(x)\downarrow$	✓ 找不到0点可假设

同理 $x\in(a,+\infty)$　$h(x)\uparrow$

$h(x)_{min}=h(a)=a+\frac{a+1}{e^{2a}-1}$

$m\leq a+\frac{a+1}{e^{2a}-1}=a+\frac{1}{2}$　又∵ $a\in(\frac{1}{2},1)$　∴ $m\leq 1.5$　∴ $m_{max}=1$

问题与积累	反思
极值2 对称问题 中心对称 $y_1=f(x)$，$y_2=-f(-x)$ 关于原点对称 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=2b-f(2a-x)$ 关于 (a,b) 对称 轴对称 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=f(-x)$ 关于y轴对称 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=f(2a-x)$ 关于 $x=a$ 对称 9. $f(x)=ax^3-3x+1$ 对于 $x\in[-1,1]$ 总有 $f(x)\ge 0$ 成立，则 $a=$ 4 ① $x=0$ 不论a取何值，均成立 ② $x\in(0,1]$ 时 $ax^3-3x+1\ge 0$　$a\ge \frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$　$g(x)=$ 求导 $\Rightarrow \frac{3(1-2x)}{x^4}$ $(0,\frac{1}{2}]\uparrow$ $[\frac{1}{2},1]\downarrow$ $g(x)_{max}=g(\frac{1}{2})=4$ $a\ge 4$ 14. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$ 当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$ $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$　$\because m\le 2$ $f(x)>0 \Rightarrow e^x>\ln(x+m)$　$\therefore \ln(x+m)\le\ln(x+2)$ $\therefore e^x>\ln(x+2)$ 无法判断正负 再次求导 构造函数 $g(x)=e^x-\ln(x+2)$　$\boxed{\because x+2>0}$ 定义域优先 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 单增函数　x_0　找零点特殊值代入 尝试后找不到零点再设 设零点为 x_0 $\boxed{e^{x_0}-\frac{1}{x_0+2}=0}$ ☆ → 缩小范围 $g'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$ $g'(0)=\frac{1}{2}>0$ $g(x)_{min}=g(x_0)$　$e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$　$-\ln e^{x_0}=\ln(x_0+2)$　$-x_0=\ln(x_0+2)$	③ $x\in[-1,0)$ $a\le\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ 在 $[-1,0)\uparrow$ $\therefore g(x)_{min}=g(-1)=4$ 转换主元 $a\le 4$ $\therefore a=4$ 分析后确定是否求导 原 $g(x)$

$g(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0+2)$

$=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{x_0^2+2x_0+1}{x_0+2}=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$　$\therefore$ 成立

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
最大值与最小值　取等时慎重！	奇函数只可有偶次方式
1. 已知函数 $f(x)=x^3-tx^2+3x$ 若对于任意的 $a\in[1,2]$，$b\in(2,3]$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上↓，则t取范 $[5,+\infty)$ $[1,3]$ $f'(x)=3x^2-2tx+3$　　x的区间都固定 只可用两根法 $f'(x)<0$　　$t>\frac{3x^2+3}{2x}$　　$x=\frac{2t\pm\sqrt{4t^2-36}}{6}=\frac{t\pm\sqrt{t^2-9}}{3}$	$\begin{cases}\frac{t-\sqrt{t^2-9}}{3}\le 1\\ \frac{t+\sqrt{t^2-9}}{3}\ge 3\end{cases}$　$t\ge 3$ $t\ge 5$
2. 已知 $f(x)=6+12x-x^3$，$x\in[-\frac{1}{3},3]$，求最大值和最小值 $f'(x)=-3x^2+12$　根值点 $x=\pm 2$ $x=-2$ 取不到☆ $\therefore f(-\frac{1}{3})=\frac{55}{27}$　$f(2)=22$　$f(3)=15$ $\therefore f(x)max=22$　$f(x)min=\frac{55}{27}$	
3. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$ 其在 $[1,e]$ 上最小值为 $\frac{3}{2}$，求a的值 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$ ① $-a\le 1$ 即 $a\ge -1$　$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上↑　$f(x)min=f(1)=-a=\frac{3}{2}$ ② $1<-a<e$　$-e<a<-1$　$f(x)min=f(-a)=\ln(-a)+1$ ③ $-a\ge e$　$a\le -e$　$f(x)min=f(e)$　$a=-\frac{e}{2}$ 不成立	画出导函数草图 看定义域位置 若为 $\frac{ax+1}{x^2}$ 形式 提出变量 $\frac{a(x+\frac{1}{a})}{x^2}$ 便于看正负

平时多努力一分，考试多收获一分！

$a=-\frac{3}{2}$ 不满足 $a\ge -1$

$\ln(-a)+1=\frac{3}{2}$

$\ln(-a)=\frac{1}{2}$

$-a=e^{\frac{1}{2}}$　$a=-\sqrt{e}$

问题与积累	反思
17. 设 $f(x)=(x-1)e^x-kx^2\ (k\in R)$ 当 $k\in(\frac{1}{2},1]$，求 $f(x)$ 在 $[0,k]$ 上的最大值 M. $f'(x)=x(e^x-2k)$ 找定义域在图象上的位置 复合函数 $g(k)=\ln 2k-k$ $g'(k)=\frac{1}{k}-1\geq 0$ ∴ $g(k)$ 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上单增 $g(\frac{1}{2})<0$　$g(1)<0$ 最大　∴ $g(k)$ 求 <0 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上恒成立 ∴ $\ln 2k<k$ ∴ $f(x)$ 图像 ∴ 最小值为 $f(0)$ 或 $f(k)$ 比较两者大小 构造 $f(0)=-1$　$f(k)=(k-1)e^k-k^3$ $h(k)=(k-1)e^k-k^3+1$　$h'(k)=\underbrace{k}_{>0}(e^k-3k)$ $\varphi(k)=e^k-3k$　$\varphi'(k)=e^k-3\leq e-3<0$ ∴ $\varphi(k)$ 单减　$h(k)$　单增　∴ $h(k)$ 先增后减 $\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0$ 平方比较　$\varphi(1)=e-3<0$	∵ $e^x>0$ ∴ $x(e^x-2k)$ 图象可看作二次函数

$h(\frac{1}{2})>0$
$h(1)=0$
∴ $f(k)=0$ 且当 $k=1$
综上 $k=1$ 时 $M=1$
$k\neq 1$ 时 $M=(k-1)e^k-k^3+1$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
最大值与最小值　拆分 研究一个把另一个看作常数	
$\forall x_1 \in [\ ], \forall x_2 \in [\ ], f(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(x)_{max} > g(x)_{min}$	
$\forall x_1 \in [\ ], \exists x_2 \in [\ ], f(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(x)_{max} > g(x)_{min}$	
4. 若点P是$y=x^2-\ln x$上任意一点，则P到$y=x-2$的最小距离为 $\underline{\sqrt{2}}$	切线斜率同
$k=1$　$y'=2x-\frac{1}{x}$　$f'(x)=1$　$\frac{2x^2-1}{x}=1$　$2x^2-1-x=0$　$(x-1)(2x+1)=0$	※ 平行线间距离
$x=1$　$y=1$　$y=x+b$　$b=0$　$y=x$	
$d=\frac{\|-2\|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$	
11. 若不等式$\|mx^3-\ln x\|\geq 1$对$\forall x\in(0,1]$恒成立，则m的取范 $\underline{[\frac{e^2}{3},+\infty)}$	
1必然成立 $\|m\|\geq 1$　$m\leq -1$　$m\geq 1$　缩小范围	② $m\leq -1$时
① $m \geq 1$时　$f'(x)=3mx^2-\frac{1}{x}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{3m}}$
$f(\sqrt[3]{\frac{1}{3m}})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3m$　$3mx^2=\frac{1}{x}$　$x=\sqrt[3]{\frac{1}{3m}}$	$g(x)_{min}=g(1)$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3m\geq 1$　$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3m\leq -1$	
$\frac{1}{3}\ln 3m\geq\frac{2}{3}$　$\frac{1}{3}\ln 3m\leq -\frac{4}{3}$	$\Rightarrow m\geq 1$
$\ln 3m\geq\ln e^2$　$\ln 3m\geq 2$　$\ln 3m\leq -4$	不成立
$3m\geq e^2$　~~$e^{3m}\geq 2\ln 2$~~　$\ln 3m\leq\ln\frac{1}{e^4}$	

$m\geq\frac{e^2}{3}$　平时多努力一分，考试多收获一分！　$3m\leq\frac{1}{e^4}$

$m\leq\frac{1}{3e^4}$ 不成立

问题与积累	反思
看作m函数 14. 已知函数 $f(x)=x^3+x$ 对任意 $m\in[-2,2]$，$f(mx-2)+f(x)<0$ 恒成立，则 x 取范 $(-2,2)$ $f(x)$ 为奇函数 ∴ $f(x)$ 单增 $f'(x)=3x^2+1>0$ $f(mx-2)<-f(x)=f(-x)$ $-x>mx-2$ $mx+x<2$ $x(m+1)<2$ $m\in[-1,2]$ $x<\frac{2}{m+1}$ 19. $f(x)=x^3+ax^2-a$，对任意 $a\le-3$，使 $f(1)$ 在 $f(x)$ 在区间 $[1,b]$ $(b>1)$ 上取最大值，求 b 取范 $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$ ① $1<b\le-\frac{2}{3}a$ 成立 ② $b>\frac{2}{3}a$ $f(1)\ge f(b)$ $1+a-a\ge b^3+ab^2-a$ $b^3+ab^2-a-1\le0$ ⟹ 看作关于a的函数 $(b^2-1)a+b^3-1\le0$　配凑 ~~$b^3-b^2-a(b^2-1$~~ $b^2-1>0$　$g(x)$: $(b^2-1)a+(b-1)(b^2+b+1)\le0$　单增 ~~$(b^2-1)a\le(1-b)(b^2+b+1)$~~ $g(x)_{max}=g(-3)$　~~$a\ge\frac{b^2+b+1}{b+1}$~~ $=b^3-3b^2+2\le0$　~~$-3\ge\frac{b^2+b+1}{b+1}$~~ $(b-1)(b^2-2b-2)\le0$ >0　$b^2-2b-2\le0$ $1<b\le1+\sqrt{2}$	$m\in[-2,-1)$ $x>\frac{2}{m+1}$ $x>-2$ 画草图理解 $b^3-1=(b-1)(b^2+b+1)$ $b^3+1=(b+1)(b^2-b+1)$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{4}{3}$；$l$：$9x+2y+c=0$，若当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)$ 图象恒在 l 下方，则 c 的取值 $c<-6$

l：$y=-\frac{9}{2}x-\frac{c}{2}$　　$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{4}{3}<-\frac{9}{2}x-\frac{c}{2}$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}<-\frac{c}{2}$

$g'(x)=x^2-2x+\frac{3}{2}>0$　　$g(x)\uparrow$　　$\therefore g(x)_{max}=g(2)=3$

$-\frac{c}{2}>3$　　$c<-6$

12．$f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，$a>1$

证明 $a<5$，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$　　设 $x_1>x_2$　$f(x_1)-f(x_2)>x_2-x_1$

$f(x_1)+x_1>f(x_2)+x_2$

设新函数
证其单调性

$g(x)=f(x)+x$　　$g'(x)=x-(a-1)+\frac{a-1}{x}\geq 2\sqrt{a-1}-(a-1)$

$\because 1<a<5$　设 $\sqrt{a-1}=t$　　$\therefore 1<t<2$

$\therefore g'(x)\geq \underbrace{2t-t^2}_{min=1}$　　$t=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1$

$\because g'(x)>0$　　$\therefore g(x)$ 单增

$\therefore f(x_1)+x_1>f(x_2)+x_2$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
14. 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$ （1）讨论 $f(x)$ 的单调性 x　x_1x_2 （2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2，假设过点 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率为 k，问是否存在 a，使得 $k=2-a$？若存在，求出 a 的值，如不存在，请说明理由 (2) $k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_1-x_2)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}-a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1x_2}$ 韦达 $\overbrace{x_1x_2}^{f'(x)}=1$　$\underbrace{设x_2>x_1}$ $x_1=\frac{1}{x_2}$　$=2-a\underbrace{\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}}_{1}=2-a$ 设其为1 $\ln x_1-\ln x_2=x_1-x_2$ $\ln x_1-\ln x_2-x_1+x_2=0$ $g(x)=-\ln x_2-\ln x_2-\frac{1}{x_2}+x_2=0$ * $g'(x)=-\frac{2}{x_2}+\frac{1}{x_2^2}+1$　　$\because x_1x_2=1$ $=\frac{-2x_2+1+x_2^2}{x_2^2}>0$　　且 $x_1>0$ $x_2>0$ 且 $x_2>x_1$ $\therefore$ ~~$x_1>1$~~ $x_2>1$ $\therefore g(x)\uparrow$，$g(x)>g(1)=0$ $\therefore$ 不满足*中使 $g(x)=0$．	

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
$f(x)=2\ln x-x^2-ax$，若 x_1，x_2 是 $f(x)$ 两个零点，且 $x_1<x_2<4x_1$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 导函数，证明 $f'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right)>0$	
$f(x_1)=2\ln x_1-x_1^2-ax_1=0$ ① $f(x_2)=2\ln x_2-x_2^2-ax_2=0$ ② ①-②式 $a=\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)$ $f'(x)=\frac{2}{x}-2x-a$ 代入 a $f'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right)=\frac{6}{2x_1+x_2}-\underbrace{\frac{2}{3}(2x_1+x_2)-a}_{>0}$ $=\underbrace{\frac{2}{x_2-x_1}}_{<0}\underbrace{\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{3\frac{x_2}{x_1}-3}{2+\frac{x_2}{x_1}}\right]}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{3}(x_1-x_2)}_{>0}$ 令 $t=\frac{x_2}{x_1}\in(1,4)$ $\varphi(t)=\cancel{\ln\frac{x_2}{x_1}}\ \ln t-\frac{3t-3}{2+t}$ $\varphi'(t)=\frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2}<0$ $\therefore \varphi(t)\downarrow$　$\therefore \varphi(t)<\varphi(1)=0$　$\therefore f'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right)>0$	充分利用题中条件

平时多努力一分，考试多收获一分！

二、问题与积累 | 反思

☆恒成立专题

① 分离变量

讨论

同除构造函数 洛比塔法则

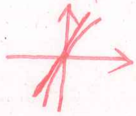
$\frac{\sin x}{x}$　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$

$\frac{0}{0}$　$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}$　$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$　$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$

$x>\ln(x+1)$



② 构造新函数 使最值满足条件

例1　$f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=xf'(x)$，$x\geq 0$，若 $f(x)\geq ag(x)$ 恒成立，求a的取范

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

$f(x)\geq ag(x)$

$\ln(1+x)\geq\frac{ax}{x+1}$

法1 分离变量

① $x=0$时　$a\in R$

② $x>0$时

$h(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}\geq a$

$h'(x)=\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

$V(x)=x-\ln(x+1)$

$V'(x)=1-\frac{1}{x+1}$ ↑

$V(x)\geq V(0)=0$

∴ $V(x)$ ↑

∴ $h'(x)>0$

∴ $h(x)$ ↑

$h(x)_{min}=h(0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)}{1}=1$ 极限取不到

有时会取到

∴ $h(x)>1$

∴ $a\leq 1$

法二 构造新函数

$g(x)=\ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}\geq 0$

$g'(x)=\frac{1+x-a}{(1+x)^2}$

$1-a\geq 0$　$a\leq 1$时　$g(x)_{min}=g(0)=0$

$g(x)\geq 0$　$g(x)$ ↑

成立

② $a>1$时

$a-1$

$(0,a-1)$ ↓　$(1,+\infty)$ ↑

∴ 不恒 ≥ 0

∴ 不成立

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
例2 设函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$	

(1) 证明 $f(x)$ 导数 $f'(x)\geq 2$

$f'(x)=e^x+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$

$\therefore f'(x)\geq 2$

(2) 对所有 $x\geq 0$ 都有 $f(x)\geq ax$，求 a 取范

法一 $g(x)=e^x-e^{-x}-ax\geq 0$

$g'(x)=e^x+e^{-x}-a$

$\because e^x+e^{-x}\geq 2$

$\therefore g'(x)\geq 2-a$

① $a\leq 2$ 时　$x>0$ 时

$g'(x)\geq 0$ $\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$

$\therefore g(x)\geq g(0)>0$ 成立

② $a>2$ 时　$e^x+\frac{1}{e^x}=a$

$g'(x)=0$ 正根为 $\frac{e^{2x}+1}{e^x}=a$

$e^{2x}+1=ae^x$

设 $e^x=t$　$t^2+1-at=0$

$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

在 $x\in(0,x_1)$ $g(x)<0$ $e^x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

$g(x)\downarrow$ $g(x)<g(0)=0$ $x_1=\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

矛盾

法二：分离变量

$x=0$ 时　$a\in R$

$x>0$ 时　$\frac{e^x-e^{-x}}{x}\geq a$

$h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

$h'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})x+e^x-e^{-x}}{x^2}$

$V(x)=(e^x+e^{-x})x+e^x-e^{-x}$

$V'(x)=\cancel{e^x+e^{-x}+e}$

$e^xx-e^{-x}x+e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}$

$=e^x(2x+1)-e^{-x}x$

$V'(x)>0$

$\therefore V(x)\uparrow$

$V(x)>V(0)=0$

$\therefore h'(x)\uparrow>0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

$\lim e^x+e^{-x}=2$

$\therefore a\leq 2$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
1．已知定义在正实数集上的函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax$，$g(x)=3a^2\ln x+b$，其中 $a>0$．设两曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 有公共点（$x>0$），且在该点处的切线相同.	增长速率 指>幂>对

（I）用 a 表示 b；

（II）求证：$f(x)\geq g(x)$（$x>0$）.

(1) 设公共点为 x_0

$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) & \frac{1}{2}x_0^2+2ax_0=3a^2\ln x_0+b \\ f'(x_0)=g'(x_0) & x_0+2a=\frac{3a^2}{x_0} \end{cases}$　$x_0=a$ 或 $x=-3a$（舍）

$b=\frac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a$

(2) $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax-3a^2\ln x-b$

$F'(x)=x+2a-\frac{3a^2}{x}$　$x^2+2ax-3a^2=0$

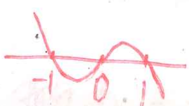
$=\frac{x^2+2ax-3a^2}{x}$　$(x-a)(x+3a)=0$

$F(x)_{min}=F(a)=\frac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a-\frac{1}{2}a^2-2a^2+3a^2\ln a$

$=0$

$\therefore f(x)\geq g(x)$

$-x(x^2-1)=0$ 数轴标根



平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思

解析式中含有参数 区间确定

$f(x)=x^3-3tx+m$ （$x\in R$，m和t为常数）是奇函数

(1) 设 $g(x)=|f(x)|$ （$x\in[-1,1]$），求 $g(x)$ 最大值 $F(t)$

$m=0$ $\therefore f(x)=\cancel{x^3+}$ x^3-3tx

$g(x)=|x^3-3tx|$ $\because f(x)$为奇函数

技巧

$\therefore g(x)$为偶函数 $\therefore$ 只研究其$[0,1]$即可

① $t\le 0$时 $f'(x)=3x^2-3t=0$

$x=\pm\sqrt{t}$

必须比较大小

$f\,g(x)\nearrow$

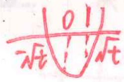
因为负值加绝对

$f(0)=0$ $f(1)=1-3t\ge>0$

值后可能超过正值

$\therefore \cancel{g(x)=}$ $F(t)=1-3t$

② $t>0$时



1) $t\ge1$时 $f(0)=0$ $f(1)=1-3t<0$

比较大小方法

$\therefore F(t)=3t-1$

① 平方做差

2) $0<t<1$时 $f(0)=0$ $f(1)=1-3t$

② 直接做差

$f(\sqrt{t})=-2t\sqrt{t}$

比较 $f(\sqrt{t})$ 与 $f(1)$ 平方做差

$4t-1>0$

$\frac{1}{4}<t<1$时

$f(\sqrt{t})^2>f(1)^2$

$\therefore F(t)=2t\sqrt{t}$

$0<\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$时

$F(t)=1-3t$

验根 — 因式分解

拆分

$4t^3-9t^2+6t-1$

$=t^3-1+3t^3-9t^2+6t$

$=(t-1)(t^2+t+1)+3t(t^2-3t+2)$

$=(t-1)(t^2+t+1)+3t(t-1)(t-2)$

$=(t-1)(t^2+t+1+3t^2-6t)$

$=(t-1)(4t^2-5t+1)$

$=(t-1)(4t-1)(t-1)=(t-1)^2(4t-1)$

问题与积累	反思

验根法 带入 $t=1$ 得 0

$$\begin{array}{r} 4t^2-5t+1 \\ t-1 \,\big)\, \overline{4t^3-9t^2+6t-1} \\ \underline{4t^3-4t^2} \\ -5t^2+6t \\ \underline{-5t^2+5t} \\ t-1 \end{array}$$

$(t-1)(4t^2-5t+1)$

$=(t-1)^2(4t-1)$

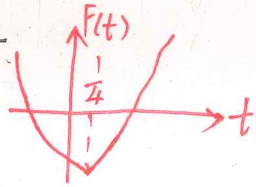
综上 ① $t\le\frac{1}{4}$时 $F(t)=1-3t$

② $1>t>\frac{1}{4}$时 $F(t)=2\sqrt{t}$

③ $t\ge 1$时 $F(t)=3t-1$

(2) 求$F(t)$的最小值

由(1)知



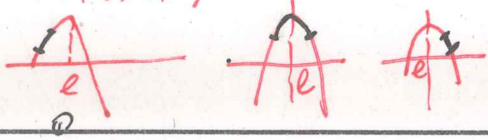
$F(t)_{min}=F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

函数解析式确定 区间含有参数

已知 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

设 $a>0$，求 $F(x)=af(x)$在$[a,2a]$上最小值

$f(x)$ 在$(0,e)\uparrow$ $(e,+\infty)\downarrow$



最小值均在$f(a)$或$f(2a)$上取得 直接做差

$F(a)-F(2a)=\ln a-\frac{1}{2}\ln 2a$

$=\ln a-\ln\sqrt{2a}$

$=\ln\frac{a}{\sqrt{2a}}$

$=\ln\sqrt{\frac{a}{2}}$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
$(1+5x)^6=a_0+a_1x+\cdots+a_6x^6$ 求$a_1+a_2+\cdots+a_6$ 第一次调卷. 二项式定理与导数联系 两边同时求导	

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思

生活中的优化问题.

[例1]　某分公司经销某种品牌产品，每件产品的成本为3元，并且每件产品需向总公司交a元$(3\leqslant a\leqslant 5)$的管理费，预计当每件产品的售价为$x$元$(9\leqslant x\leqslant 11)$时，一年的销售量为$(12-x)^2$万件.

(1) 求分公司一年的利润L(万元)与每件产品的售价x的函数关系式；

(2) 当每件产品的售价为多少元时，分公司一年的利润L最大，并求出L的最大值$Q(a)$.

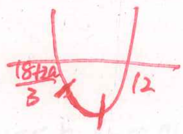
分段　　　展开求导

(1) $L=(12-x)^2(x-3-a)\quad(9\leq x\leq 11)$

(2) $L'=-2(12-x)(x-3-a)+(12-x)^2$

$=(12-x)(-3x+18+2a)=0$

$x=12$(舍) $x=\frac{18+2a}{3}$



$\because 3\leq a\leq 5$

$\therefore 8\leq 6+\frac{2a}{3}\leq\frac{28}{3}$

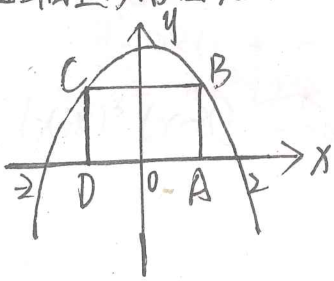
① $8\leq\frac{18+2a}{3}<9$ 时

即 $3\leq a\leq\frac{9}{2}$ 时　无解

② $9\leq\frac{18+2a}{3}\leq\frac{28}{3}$ 时

$L_{max}=L(6+\frac{2}{3}a)=4(3-\frac{a}{3})^3$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
[例2] 某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距 m 米. 余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算，一个桥墩的工程费用为256万元；距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2+\sqrt{x})x$ 万元. 假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其他因素. 记余下工程的费用为 y 万元. (1) 试写出 y 关于 x 的函数关系式； (2) 当 $m=640$ 米时，需新建多少个桥墩才能使 y 最小？9 1) 设有n个桥墩 则有(n+1)个桥面 $(n+1)x=m$　$n=\frac{m}{x}-1$ $y=256n+(n+1)x(2+\sqrt{x})$ $=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256$ 2) $y'=\frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512)=0$ $x=64$ $n=9$	带着m 最后再替换
已知矩形的两个顶点位于x轴上，另两个顶点位于 $y=4-x^2$ 在x轴上方的曲线上，求矩形面积最大时的边长  设 $AD=x$　$x\in(0,2)$ 则 $AB=4-x^2$ $S=2x(4-x^2)$ $=-2x^3+8x$ $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$　边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\frac{8}{3}$　$S_{max}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$	

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

2016.2.27

若一个球的半径为r，作内接于球的圆柱，则其侧面积最大为 $\underline{2\pi r^2}$

$h=2\sqrt{r^2-R^2}$

$S=2\pi R h$

$=4\pi R\sqrt{r^2-R^2}$

$=4\pi\sqrt{R^2(r-R)(r+R)}$

均值不等式推广

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

法一 均值不等式 $R^2(r^2-R^2)\le\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$　$R^2=r^2-R^2$　$R=\frac{\sqrt2}{2}r$

$\cancel{\frac{1}{3}R^2(3r-3R)(r+R)\le\frac{1}{3}\times\left(\frac{3r}{3+4}\right)^2}$

拼凑定值

~~$r+R=3r-3R$~~　~~$4R=2r$~~　~~$R=\frac{r}{2}$~~

会不展开

法二 求导函数

$y=R^2(r^2-R^2)$　~~$y'=2R(r^2-R^2)+R^2(2r-2R)$~~

$y'=2R(r^2-R^2)+R^2\cancel{(2r-2R)}\ \cancel{=-4R^3+2Rr^2+2rR^2}$

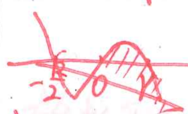
$=-4R^3\cancel{+r^2R}+2r^2R=\cancel{(r-R)2R(2R+r)}$

$(x+r)^3(r-x)$

$=2R(-2R^2+r^2)=2R(r-\frac{\sqrt2}{2}R)(r+\sqrt2R)$

~~$R=r$ 时~~

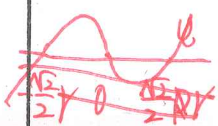
~~Smax最大~~



1′　$y'=3(x+r)^2(r-x)-(x+r)^3$

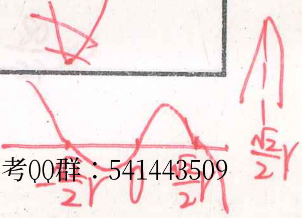
$=(x+r)^2(2r-4x)$

$y_{max}=y_{\frac{r}{2}}$



2′　$(x+r)(x+r)(x+r)(r-x)$

$=\frac{1}{3}(x+r)(x+r)(x+r)(3r-3x)\le\frac{1}{3}\left(\frac{6r}{4}\right)^2$



平时多努力一分，考试多收获一分！

$x+r=3r-3x$

$x=\frac{r}{2}$ 最大

问题与积累	反思

18. 为了解决老百姓"看病贵"的问题，国家多次下调药品价格，各大药厂也在积极行动，通过技术改造来提高生产能力，降低能耗从而降低药品生产的成本. 某药厂有一条价值 a 万元的药品生产线，经过测算，生产成本降低 y 万元与技术改造投入 x 万元之间满足：①y 与 $(a-x)$ 和 x^2 的乘积成正比；② 当 $x=\frac{a}{2}$ 时，$y=a^3$，并且技术改造投入比率：$\frac{x}{2(a-x)}\in(0,t]$，t 为常数且 $t\in(0,2]$.

(1) 求 $y=f(x)$ 的表达式及定义域；

(2) 为了有更大的降价空间，要尽可能地降低药品的生产成本，求 y 的最大值及相应的 x 值.

(1) $y=f(x)=k(a-x)x^2$

代入 $x=\frac{a}{2}$，$y=a^3$　$k=8$

$\therefore y=8(a-x)x^2$

$0<\frac{x}{2(a-x)}\le t$　　$x\le 2t(a-x)$

$0<x\le\frac{2ta}{2t+1}$

(2) $y=-8x^3+8ax^2$

$y'=-24x^2+16ax$　　$x=0$ 或 $\frac{2}{3}a$　　0　$\frac{2}{3}a$

$\frac{2a}{3}\ge\frac{2ta}{2t+1}$　　$0<t\le 1$

$y_{max}=f\left(\frac{2ta}{2t+1}\right)=\left(\frac{2ta}{2t+1}\right)^2\frac{8a}{2t+1}$

$\frac{2a}{3}$　$\frac{2a}{3}<\frac{2ta}{2t+1}$　　$1<0\le 2$　　$f_{max}=f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{80}{27}a^3$

☆ 实际问题 联系实际

$a>x$

切常数 处理方式同

有参数要考虑范围

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

在高为H，底面半径为R的圆锥内作个内接圆柱，当圆柱底面半径r为多大时，圆柱体积最大

$$\frac{R}{H}=\frac{r}{H-h}$$

$$r=R\left(1-\frac{h}{H}\right)\qquad h=H-\frac{Hr}{R}$$

$$V=\pi r^2\left(H-\frac{Hr}{R}\right)$$

$$=\pi r^2 H-\frac{\pi H}{R}r^3$$

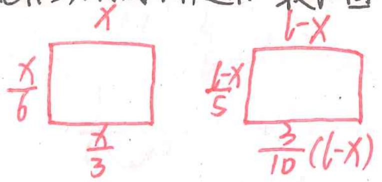
$$V'=-\frac{3\pi H}{R}r^2+2\pi rH$$

$$r=\frac{2}{3}R\qquad V_{max}=\frac{4\pi r^2}{27}h$$

区分何时让两边方程为0，何时求最值

将长为l的铁丝剪成两段，各围成长：宽=2:1及3:2的矩形，求面积之和最小值

注意两分



$$S=\frac{x}{6}\cdot\frac{x}{3}+\frac{3}{50}(l^2-2xl+x^2)$$

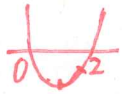
$$=\frac{x^2}{18}+\frac{3}{50}x^2-\frac{3}{25}xl+\frac{3}{50}l^2$$

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{27}{52}L$$

$$S_{min}=\frac{3}{104}l^2$$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

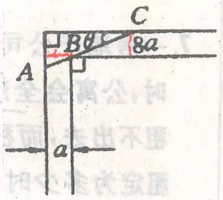
问题与积累	反思
设底面为等边三角形的直棱柱体积为V，其表面积最小时，底面边长为 $\underline{\sqrt[3]{4V}}$	
x $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h=V$ $h=\frac{4\sqrt{3}V}{3x^2}$ $S=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3xh$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{4\sqrt{3}V}{x}$ $S'=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}V}{x^2}$ 令 $S'=0$　$\sqrt{3}x=\frac{4\sqrt{3}V}{x^2}$　$x=\sqrt[3]{4V}$	将未知转化为已知量
某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料，瓶子的制造成本是每瓶 $0.8\pi r^2$ 分，其中 r（单位：cm）是瓶子的半径．已知每出售 1 mL 的饮料，制造商可获利 0.2 分，且制造商能制作的瓶子的半径 r 符合 $r\in[1,a](a\in(1,6])$．则当瓶子的半径多大时，能使每瓶饮料的利润最大？	
L $L=0.2\times\frac{4}{3}\pi r^3-0.8\pi r^2$ $=\frac{4}{15}\pi r^3-\frac{12}{15}\pi r^2$ $L'=\frac{4}{5}\pi(r^2-2r)$　$r=0$（舍）或 2  ① $1<a\le 2$ 时 $L_{max}=L(1)=-\frac{8}{15}\pi$ ② $2\le a<6$ 时 $L_{max}=L(1)$ 或 $L(a)$ $L(a)-L(1)=\frac{4\pi}{15}(a^3-3a^2+2)$ 拆分 $=\frac{4\pi}{15}[(a^3-a^2)+2(1-a^2)]$ $=\frac{4}{15}\pi(a-1)(a^2-2a-2)$	判断 a 在何处 综上 $1<a\le\sqrt{3}+1$ $L_{max}=-\frac{8}{15}\pi$ $\sqrt{3}+1\le a\le 6$ 时 $L_{max}=0.8\pi(\frac{a^3}{3}-a^2)$

平时多努力一分，考试多收获一分！

$=\frac{4}{15}\pi(a-1)(a-1-\sqrt{3})(a+\sqrt{3}-1)$

问题与积累	反思

如图1-28所示，宽为a的走廊与另一走廊垂直相连，如果长为$8a$的细杆能水平通过拐角，则另一走廊的宽度至少是多少？



$AB=\frac{a}{\cos\theta}$

$BC=8a-\frac{a}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\left(8a-\frac{a}{\cos\theta}\right)\sin\theta$

$f'(\theta)=8a\cos\theta-\frac{a(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$=8a\cos\theta-\frac{a}{\cos^2\theta}$

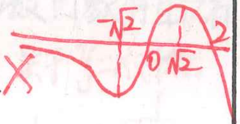
$f'(\theta)=0$　　$8a\cos^3\theta=a$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$　∴ Bc 最小为 $3\sqrt{3}a$

周测

1. $f(x)=(2x-x^2)e^x$ 无最大值和最小值 ×　　$\sqrt{2}$ ✓

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$



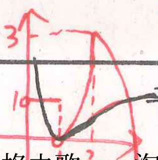
探究$f(x)$图象 → 趋近　依高次

2. 已知函数 $f(x)=|\ln x|$，$g(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 1\\ |x^2-4|-2, & x>1\end{cases}$，则方程 $|f(x)+g(x)|=1$ 的实根有 __4__ 个

⇓

$y=f(x)$ 与 $y=1-g(x)$ 交点、及 $y=f(x)$ 与 $y=-1-g(x)$ 交点

$y=1-g(x)\begin{cases}1, & 1<x\le 1\\ 7-x^2 & x\ge 2\\ x^2-1, & 1<x<2\end{cases}$　　$y=-1-g(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le 1\\ 5-x^2, & x\ge 2\\ x^2-3, & 1<x<2\end{cases}$



$\ln 2\approx 0.3$

要考虑 $\ln x$ 在 1 的图象

2　　1

问题与积累	反思

1. 设函数 $f(x)=\ln(e^x+1)(x\in R)$ 可以表示成奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和，则 $h(x)$ 最小为 $\underline{\ln 2}$

$g(x)+h(x)=f(x)$

$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)$

$\begin{cases} g(x)+h(x)=\ln(e^x+1) \\ -g(x)+h(x)=\ln(e^{-x}+1) \end{cases}$

$h(x)=\frac{1}{2}\ln(2+e^x+e^{-x})$

$y=\ln x \nearrow$　$h(x)\geq\frac{1}{2}\ln(2+2\sqrt{e^x e^{-x}})=\ln 2$

2. 若 $m\geq-1$，则函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-m)$ 值域为 R

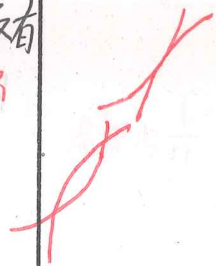
包含 $(0,+\infty)$ 即可

$\Delta\geq0$

$m\geq-1$

3. 设 $a>1$，则当 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 两个函数图象有且仅有一个公共点时 $\ln\ln a=$ $\underline{-1}$

互为反函数 关于 $y=x$ 对称



$y=x$ 是其切线　$y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=1$　$x=\frac{1}{\ln a}$

$\therefore$ 交点为 $(\frac{1}{\ln a},\frac{1}{\ln a})$

$\begin{cases} a^x\ln a=1 \Rightarrow 取\ln \\ \frac{1}{x\ln a}=1 \end{cases}$　$x\ln a+\ln\ln a=0$

9/2

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
定积分的概念 3.1 5．设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，用分点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$把区间$[a,b]$等分成$n$个小区间，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$(其中$\Delta x$为小区间的长度)，那么$I_n$的大小(B D) A．与$f(x)$和区间$[a,b]$有关，与分点的个数$n$和$\xi_i$的取法无关 B．与$f(x)$、区间$[a,b]$和分点个数$n$有关，与$\xi_i$的取法无关 C．与$f(x)$、区间$[a,b]$和$\xi_i$的取法有关，与分点的个数$n$无关 D．与$f(x)$、区间$[a,b]$、分点的个数$n$、$\xi_i$的取法都有关	未求极限 求极限后为常数
3 定积分$\int_a^b f(x)dx$的大小(B A) 已表示极限 A．与$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，与ξ_i的取法无关 B．与$f(x)$有关，与区间$[a,b]$以及ξ_i的取法无关 C．与$f(x)$以及ξ_i的取法有关，与区间$[a,b]$无关 D．与$f(x)$、区间$[a,b]$和ξ_i的取法都有关	
将和式$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$表示为 定积分是 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ 或 $\int_1^2\frac{1}{x}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$ $=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ 区间长度为1　循环变化	先提出$\frac{1}{n}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 可化为 $\int_1^2 \ln x^2$ 或 $\int_0^1 \ln(1+x)^2$	

$\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})^2+\ln(1+\frac{2}{n})^2+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})^2]$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{i}{n})^2$

起始/整体

求 $\int_{-1}^{2}x^3dx=\int_1^2 x^3dx$　$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})^3 \to$ 第i个区间右端点

$-\int_{-1}^{0}x^3dx=\int_0^1 x^3dx$

$= \frac{1}{n}(1+(\frac{1}{n})^3+1+1$

$\frac{1}{n}[\frac{(n+1)^3}{n^3}+\frac{(n+2)^3}{n^3}+\cdots+\frac{(n+n)^3}{n^3}]$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})^3$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{3i^2}{n^2}+\frac{3i}{n}+\frac{i^3}{n^3})$

$=\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}1}_{n个\frac{1}{n}相加}+\frac{3}{n^2}\underbrace{(1+2+3+\cdots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}+\frac{3}{n^3}\underbrace{(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+\frac{1}{n^4}\underbrace{(1^3+2^3+\cdots+n^3)}_{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$

$=1+\frac{3}{2}(\frac{n+1}{n})+3\times\frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})(\frac{n+\frac{1}{2}}{n})+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})^3=1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

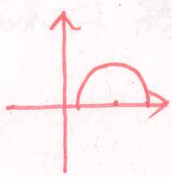
平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思

利用定积分的几何意义求下列定积分

(1) $\int_a^b \sqrt{(a-x)(x-b)}\,dx \ (b>a)$



$y^2 = ax - ab - x^2 + bx$

$y^2 + x^2 + (a+b)x + ab = 0$ → 圆的标准方程

圆心$\left(-\frac{a+b}{2}, 0\right)$　$r^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$

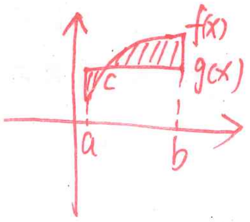
原式$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \times \frac{1}{2}\pi = \frac{(a-b)^2\pi}{8}$

(2) $\int_{-5}^{5} \underbrace{(3x^3 + 4\sin x)}_{\text{奇函数}}\,dx = 0$

7.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的两条光滑曲线，则由这两条曲线及直线 $x=a$，$x=b$ 所围图形的面积(~~D~~ A)

A. $\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$　　B. $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x$

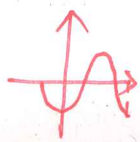
C. $\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x$　　D. $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right|$



$S = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

$\int_0^{2\pi} (1+\sin x)\,dx$　$F(x) = x - \cos x$



$F(2\pi) - F(0) = 2\pi - 1 - (-1)$

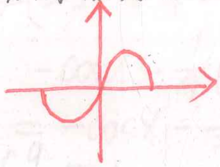
$= 2\pi$

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思

由 $y=\sin x$，$x=0$，$x=-\pi$，$y=0$ 围成的图形面积写成定积分的形式 $S=$ $-\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx$

不仅结果一致 形式也要对



微积分基本定理

$\int_0^2 |x^2-1|\,dx$

分段求

$=\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$

$=(-\frac{1}{3}x^3+x)\Big|_0^1+(\frac{1}{3}x^3-x)\Big|_1^2$

$=2$

下列有定义的定积分为　A　~~B~~

区间值均可取到

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$　0 ×　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\cos x}dx$

C. $\int_0^4\frac{dx}{(x-2)^2}$　2 ×　　D. $\int_0^2 \ln x dx$　0 ×

下列命题：

①若 f(x) 是定义在 R 上的奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 为 R 上的偶函数；　✓

导函数　　F(x) 原函数?

$\int_0^x f(x)dx=F(x)+C$

f(x) 奇　$f(-x)=-f(x)$

求导

$f(-x)=-f'(-x)$

$-f(x)=-f'(x)$

f(x) 偶函数

②若 f(x) 是周期为 T（>0）的周期函数，则 $\int_0^a f(x)dx=\int_T^{a+T}f(x)dx$；　✓

$F'(x)=f(x)$

③$(\int_0^x f'(t)dt)'=f'(x)$。　×

其中正确命题的个数为（ ~~C~~ D ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

区分 f'(-x) 先求导 再将 x 换为 -x

$[f(-x)]'$ 先换为 -x，再求导

问题与积累	反思

$y=\int_0^x(\sin t+\cos t\sin t)dt$，y的最大值

$(-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x)\Big|_0^x$　　$\cos x=-1$　　考虑上下限

$-\cos x-\frac{1}{4}(2\cos^2 x-1)-(-1-\frac{1}{4})$

$=-\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x+1=\frac{5}{2}$ max

$\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$

$=\int_4^9(\sqrt{x}+x)dx$

$=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9$

$=\frac{271}{6}$

2/3

3.3

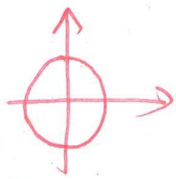
1. 求 $\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$　　$(\sqrt{x^2+1})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

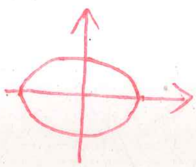
$=(\sqrt{x^2+1})\Big|_0^2$

$=\sqrt{5}-1$

尝试有关再求导

2. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的面积为　　$\int_0^2(\sqrt{4-x^2})dx$ π





$S=4\int_0^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-x^2})dx$

$=2\sqrt{3}\pi$

结合几何意义

问题与积累	反思
面积求法	

1. 分割求面积

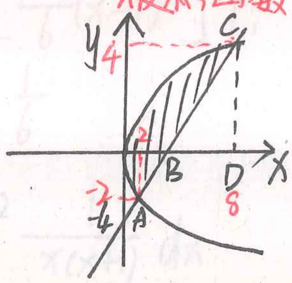
（在某个区间内，一个函数在另一个上方，被积函数为上减下）

2. 改变积分变量（使一个一直在另一个上方）

注意 ① 积分区间　　透过纸反过来看

② 被积函数

例

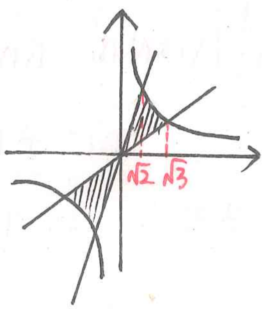


$y=x-4$ 与 $y^2=2x$，所围成的平面图形面积

$(x-4)^2=2x \quad x=2 \quad x=8$

$S=\int_{-2}^{4}\left(4+y-\frac{y^2}{2}\right)dy$

$=18$



$y=\frac{6}{x}$ 与 $y=2x$，$y=3x$ 围成平面图形的面积

上下均有

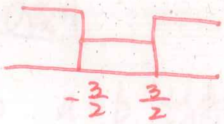
$S'=\int_0^{\sqrt{2}}(3x-2x)\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{6}{x}-2x\right)dx$

$=3\ln 3-3\ln 2$

$S=6\ln 3-6\ln 2$

问题与积累	反思

求 $\int_{-3}^{3}(|2x+3|+|3-2x|)dx$



当 $-3\le x<-\frac{3}{2}$　　$f=-4x$

$\int_{-3}^{-\frac{3}{2}}(-4x)dx+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}6\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(4x)dx=45$

$\int_1^2(x-1)^5dx$

$=\left[\frac{1}{6}(x-1)^6\right]\Big|_1^2$

$=\frac{1}{6}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

还原

$\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=[\ln x-\ln(x+1)]\Big|_1^2$

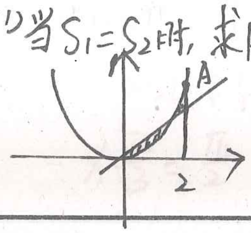
$=\ln4-\ln3$

9/3

设P在 $y=x^2$ 上，从原点向 $A(2,4)$ 移动，如果直线OP、$y=x^2$ 及 $x=2$ 所围成面积分别记为 S_1，S_2

找清面积是什么

(1) 当 $S_1=S_2$ 时，求P坐标



设 $P(a,a^2)$

$S_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{a^3}{6}$

$S_2=\int_a^2(x^2-ax)dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_a^2$

$=\frac{8}{3}-2a+\frac{a^3}{6}$

$a=\frac{4}{3}$

$P\left(\frac{4}{3},\frac{16}{9}\right)$

(2) 求 S_1+S_2 有最小值时，P的坐标

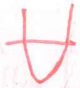
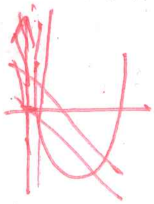
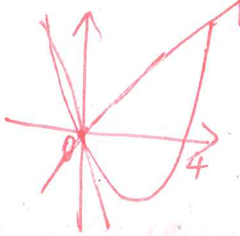
$S_1+S_2=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3}$

$S_{min}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ …

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
6. 若 $\int_0^k(2x-3x^2)dx=0$，则 $k=$ <u>0或1</u> $x^2-x^3=0$　　$a=b$　$a>b$ 均有意义 $k^2-k^3=0$ $k=0$ 或 1	
7. 一变速运动物体的运动速度 $V(t)=\begin{cases}2t & (0\le t\le 1)\\ a^t & (1\le t\le 2)\\ \frac{b}{t} & (2\le t\le e)\end{cases}$ 则在 $0\le t\le e$ 时间段内物体运动的路程是 <u>$9-\ln 2+\frac{4}{\ln 2}$</u> $a=2$　$b=8$	速度必须连续
8. 设 $f(x)$ 原函数为 $F(x)$ 是以T为周期的周期函数，若 $\int_a^T f(x)dx=u$，则 $\int_T^{a+T}f(x)dx=$ <u>$-u$</u> $F(x)\Big\vert_a^T=F(T)-F(a)=u$ $F(x)\Big\vert_T^{a+T}=F(a+T)-F(T)=F(a)-F(T)=-u$	
9. $\int_a^b f'(3x)dx=$ <u>$\frac{1}{3}f(3b)-\frac{1}{3}f(3a)$</u> $f'(3x)\Rightarrow\frac{1}{3}f(3x)$	注意复合函数
10. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$，且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}f(x)dx=0$，则 $f(x)$ 图象的一条对称轴是 <u>$\frac{5\pi}{6}$</u> $-\cos(x-\varphi)\Big\vert_0^{\frac{2\pi}{3}}=-\cos(\frac{2\pi}{3}-\varphi)+\cos\varphi=0$ $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　$x=\frac{5\pi}{6}$　　$\frac{2\pi}{3}-\varphi=\varphi$　$\varphi=\frac{\pi}{3}$	

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
11. 设 $f(a)=\int_0^1 \lvert x^2-a^2\rvert dx$	
(1) 当 $0\le a\le 1$ 时与 $a>1$ 时，分别求 $f(a)$　一个分段函数 a为自变量	
当 $0\le a\le 1$ 时 	
$\int_0^a (a^2-x^2)dx+\int_a^1 (x^2-a^2)dx$	绝对值
$=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$	
当 $a>1$ 时	
$\int_0^1 (a^2-x^2)dx=a^2-\frac{1}{3}$	
(2) 求 $a\ge 0$ 时，$f(a)$ 的最小值	
 $f(a)_{min}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$	
12. 过原点的直线 l 与 $y=x^2-4x$ 所围成的图形面积为36，求 l 方程	两种情况
$y=kx$　$kx=x^2-4x$　$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$　$\begin{cases}x=k+4\\y=k(k+4)\end{cases}$ 	
	
① $k+4>0$ 时　$S=\int_0^{k+4}(kx-x^2+4x)dx=36$	
$y=2x$	
② $k+4<0$ 时　$S=\int_{k+4}^0(kx-x^2+4x)dx=36$	

$y=-10x$

问题与积累	反思

刷题课

$f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$ 若对任意 $b>a>0$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，求m取范

法一：即证 $f(b)-f(a)<b-a$

$f(b)-b<f(a)-a$

设 $F(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x$ 单减

$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-1=\frac{x-m-x^2}{x^2}$

$-x^2-m+x\le 0$

$m\ge\underbrace{(-x^2+x)_{max}}_{}=\frac{1}{4}$

法二：$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$割线　切线是其极限 不可取到

$f'(x)\le 1$　~~$m\le$~~　$m\ge\frac{1}{4}$

已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{a}{x}\ (a>0)$，是否存在 $y=g(\frac{2a}{x^2+1})+m-1$，与 $y=f(1+x^2)$ 有四交点？

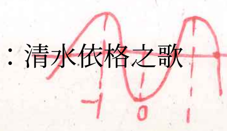
$y=\frac{x^2+2m-1}{2}$　　$y=\ln(1+x^2)$

$\frac{x^2+2m-1}{2}=\ln(1+x^2)$

$m=\underbrace{\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}_{\varphi(x)}$

$\varphi'(x)=\frac{x(1+x)(1-x)}{x^2+1}$

交点问题
参数提到一边
化为两函数
在图象上找



$\varphi(0)=\frac{1}{2}$　$\varphi(-1)=\ln 2$　$\frac{1}{2}<m<\ln 2$

问题与积累	反思

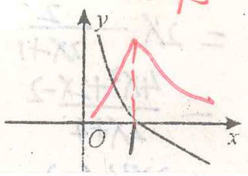
已知函数 $f(x)$ 的导函数图象如图所示，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则下列结论一定成立的是 （ A ）

A. $f(\sin A) > f(\cos B)$

B. $f(\sin A) < f(\cos B)$

C. $f(\sin A) > f(\sin B)$

D. $f(\cos A) < f(\cos B)$



$A > \frac{\pi}{2} - B$

$\sin A > \cos B$ $\sin(\frac{\pi}{2} - B)$

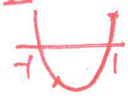
3月7日

1. 对于 R 上可导任意函数 $f(x)$，若满足 $\frac{1-x}{f'(x)} \le 0$，则必有 $f(0) + f(2)$ $\geq$ $2f(1)$

因 $f'(x)$ 不为 0 所以只有 $x=1$ 时 $=0$ 根 取

2. 若函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $(a, 6-a^2)$ 上有最小值，a 的取范 $(-2, 1)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $x = \pm 1$



交 取并集

$\begin{cases} a < 1 \\ 6-a^2 > 1 \quad -\sqrt{5} < a < \sqrt{5} \end{cases}$

$f(a) > f(1)$

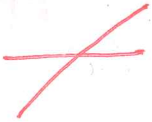
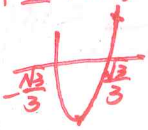
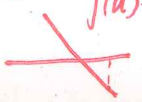
$a^3 - 3a > -2$

$a^3 - 3a + 2 > 0$

$a > -2$

反思：代入端点值看能否取

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
已知 $a\in R$，$f(x)=4x^3-2ax+a$， (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 $f'(x)=12x^2-2a=0$ $x=\pm\frac{\sqrt{6a}}{6}$ ① $a\le 0$ 时 $f(x)\uparrow$ ② $a>0$ 时 $(-\infty,-\frac{\sqrt{6a}}{6})$，$(\frac{\sqrt{6a}}{6},+\infty)\uparrow$ $(-\frac{\sqrt{6a}}{6},\frac{\sqrt{6a}}{6})\downarrow$ (2) 证明：当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)+\lvert 2-a\rvert>0$ $a\ge 2$ 时 $4x^3-2ax+2a-2>0$ 使它在 $a\ge 2$，$x\in[0,1]$ 上成立 看作 a 的一次函数 $4x^3+\underbrace{(2-2x)}_{>0}a-2=g(a)$  $g(a)\ge g(2)$ $g(2)=4x^3-4x+2=h(x)$ $h'(x)$ $\cancel{g'(2)}=12x^2-4$  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ~~$g(2)_{min}=g$~~ $h(x)_{min}=h(\frac{\sqrt{3}}{3})>0$ $a\le 2$ 时 $g(a)=4x^3-2ax+2>0$　$k=-2x<0$  $g(a)\ge g(2)$　$g(2)=4x^3+2-4x=h(x)$ $h'(x)=12x^2-4$ 成立	两个参数的不等式问题 一个先不变 再满足另个

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思

$f(x)=e^x+e^{-x}$

(1) 关于 x 的不等式 $mf(x)\le e^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 m 取范

法一：换元法 $\boxed{\text{低次看作整体}}$

$$m\le\frac{e^{-x}-1}{e^x+e^{-x}-1}$$

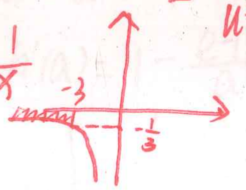
$$m\le\frac{1-e^x}{e^{2x}-e^x+1}\qquad 令\ e^x=t\quad t>1$$

$$m\le\frac{1-t}{t^2-t+1}\qquad 令\ 1-t=u\quad u<0$$

$$=\frac{u}{u^2-u+1}=\frac{1}{\underbrace{u+\frac{1}{u}-1}_{\le -3}}\ge -\frac{1}{3}$$

≤ -2

$y=\frac{1}{x}$



$m\le-\frac{1}{3}$　　※ 小于最小值

法二：求导　$h(x)=\frac{1-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$　　$h'(x)=\frac{2e^x-e^{3x}}{(e^{2x}-e^x+1)^2}$

$h'(x)=0$　　$x=\ln 2$

$m\le-\frac{1}{3}$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
(2) 已知正数 a 满足，存在 $x\in[1,+\infty)$，使 $f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$ 成立，试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小	

即证 $g(x)=f(x)-a(-x^3+3x)<0$ 有解

$g'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}+3a(x^2-1)$

$g'(x)$ 单增　$g'(x)\geq 0$　$\therefore$ $g(x)_{min}=g(1)$

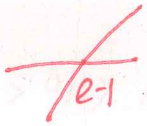
$g(1)=e+\frac{1}{e}-2a<0$

$\underbrace{a>\frac{e+e^{-1}}{2}}$

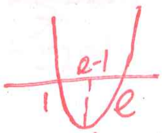
e^{a-1} 与 a^{e-1}　方法 做差 与0比 简化取ln

$h(a)=a-1-(e-1)\ln a$

$h'(a)=1-\frac{e-1}{a}=\frac{a-e+1}{a}$



$h(a)$



取巧 试值

当 $\frac{e+e^{-1}}{2}<a<e$ 时　$e^{a-1}<a^{e-1}$

当 $a=e$ 时　$e^{a-1}=a^{e-1}$

当 $a>e$ 时　$e^{a-1}>a^{e-1}$

反思：

恒成立 有解问题

① 分离变量

② 构造新函数求最值

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
3月8日 1. $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 最大值 $g(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4x-4be^x+4be^{-x}+8bx$ $g'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-4b(e^x+e^{-x})+8b-4$ $=2[e^{2x}+e^{-2x}-2b(e^x+e^{-x})+4b-2]$ $=2[(\cancel{e^{2x}+e^{-2x}})-2b(e^x+e^{-x})+4b-4]$ $(e^x+e^{-x})^2$ $=2(\underbrace{e^x+e^{-x}-2}_{>0})(\underbrace{e^x+e^{-x}}_{>2}-2b+2)$ $e^x+e^{-x}-(2b-2)>0$ ① $b\le 2$ 时　$g'(x)>0$　$g(x)>g(0)$ 成立 ② $b>2$ 时　$g'(x)<0$ 再 >0　$g(x)\downarrow\uparrow$ 不成立	导数方法 复杂 用配方法 $t^2-2bt+4b+4$
2. 已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2ax+1$ $(a>0, a<-2)$ 是否存在 a，使 $f(x)$ 极小值为1 $f'(x)=x^2+2ax-2a$ 即使右端点 x_2　$f(x_2)=1$ $\frac{1}{3}x_2^3+ax_2^2-2ax_2+1=1$ $x_2=0$（舍）或 $\frac{1}{3}x_2^2+ax_2-2a=0$ $\begin{cases}\frac{1}{3}x_2^2+ax_2-2a=0\\x_2^2+2ax_2-2a=0\end{cases}$ $x_2=4$　$a=-\frac{8}{3}$	

问题与积累	反思

3月9日

1. 已知 $a\in R^+$，不等式 $x+\frac{1}{x}\geq 2$，$x+\frac{4}{x^2}\geq 3$ …，可推广为 $x+\frac{a}{x^n}\geq n+1$，则 a 的值为 $\underline{n^n}$

$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$

$$\underbrace{\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}_{n个}+\frac{a}{x^n}\geq(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{a}{n^n}}$$

不等式推广

2. 请你把不等式"若 a_1，a_2 是正实数，则有 $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_1}\geq a_1+a_2$ 推广到一般结论

$$\frac{a_1^2}{a_n}+\frac{a_2^2}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq a_1+a_2+\cdots+a_n$$

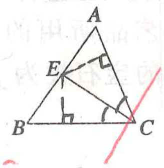
$$\frac{a_1^2}{a_n}+a_n\geq 2a_1$$

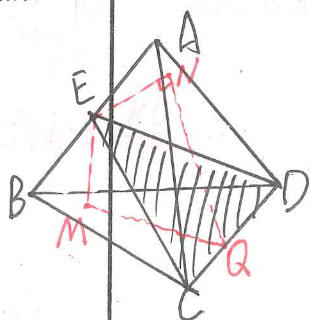
累加法

$$\frac{a_2^2}{a_{n-1}}+a_{n-1}\geq 2a_2$$

7. 在平面几何中，△ABC 的内角平分线 CE 分 AB 所成线段的比 $\frac{AE}{EB}=\frac{AC}{BC}$，把这个结论类比到空间：在三棱锥 A—BCD 中（如图所示），而 DEC 平分二面角 A—CD—B 且与 AB 相交于 E，则得到的类比

正弦定理





$$\frac{AE}{BE}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BCD}}$$

$\because EN\perp CD$　$EM\perp CD$

$\because NQ\perp CD$　$BQ\perp CD$

由全等得

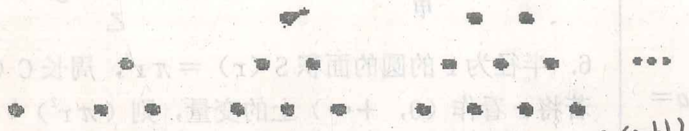
$EN=EM$

转化为全以△ABD为底

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{V_{E-ADC}}{V_{E-BCD}}=\frac{AE}{BE}$$

问题与积累	反思

（2012 年高考（湖北理））传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数. 他们研究过如图所示的三角形数：



1　3　6　10　$\frac{n(n+1)}{2}$

将三角形数 1, 3, 6, 10, 记为数列 $\{a_n\}$, 将可被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$, 可以推测

(1) b_{2012} 是 $\{a_n\}$ 的第 5030 项

(2) $b_{2k-1}=\frac{5k(5k-1)}{2}$

2012÷2=1006 共有1006组 第二个

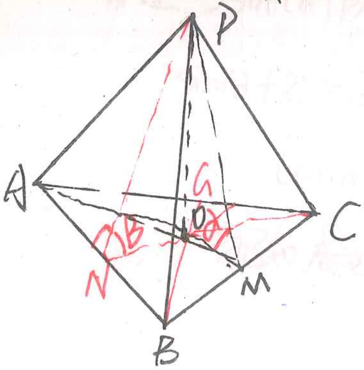
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91

$3+1005\times5+2=5030$

$2k-1=2(k-1)+1$　k-1个组 的第一个

$3+(k-1)\times5+1=5k-1$

在△ABC中，∠C=90°，则 $\cos^2A+\cos^2B=1$，用类比法猜想三棱锥性质



三条侧棱两两垂直

设侧面与底面二面角为 α, β, γ

~~sin∠PMA~~　PM⊥BC　∵AP⊥面PBC　∴AP⊥PM

$\cos\alpha=\sin\angle PAM=\frac{PO}{AP}$

同理 $\cos\beta=\sin\angle PCN=\frac{PO}{PC}$

$\cos\gamma=\frac{PO}{PB}$

射影定理　$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AP\cdot CP\cdot BP$ = 三个小三棱锥之和

$S_{\triangle OAB}$　$\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AP\cdot BP\cos\alpha h$　同理

$S_{\triangle ABP}=\cos\alpha$

同除　$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AP\cdot CP\cdot BP=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(AP\cdot BP\cos\alpha+BP\cdot CP\cdot\cos\beta+AP\cdot CP\cdot\cos\gamma)\cdot h$

$1=\frac{\cos\beta h}{CP}+\frac{\cos\alpha h}{AP}+\frac{\cos\alpha h}{BP}$

$\therefore\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
综合法与分析法 已知 $a>0, b>0, c>0$ 求证 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{2}{a+b}$ $a+b\geq2\sqrt{ab}$ $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$　$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}\geq\frac{2}{a+c}$ $\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{2}{b+c}$　同向正可加 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$ 若 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$ 求证 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$ 充分条件 只需证 $3\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta+\alpha)$ 即证 $3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$ $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$ $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$ 与已知~~成立~~相符，所以结论成立	三项分开两项比较 分析逆倒叙

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
3月12日	
已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，若 $a\neq b$，求证 $\lvert f(a)-f(b)\rvert<\lvert a-b\rvert$	
只需证	
$\lvert\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\rvert<\lvert a-b\rvert$	
$\Leftarrow 1+a^2-2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}+1+b^2<a^2-2ab+b^2$	
$\Leftarrow 2+2ab<2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$	
$1+ab<\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$	
$1+2ab+a^2b^2<1+a^2b^2+a^2+b^2$	
$a^2+b^2>2ab$	
又∵ $a\neq b$ 根据均值 成立	
设二次函数 $f(x)=x^2+px+q$，	
求证：$\lvert f(1)\rvert,\lvert f(2)\rvert,\lvert f(3)\rvert$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$	反证法
假设 $\lvert f(1)\rvert,\lvert f(2)\rvert,\lvert f(3)\rvert$ 均小于 $\frac{1}{2}$	拼凑
则 $\lvert f(1)\rvert+\lvert 2f(2)\rvert+\lvert f(3)\rvert<2$	
$\lvert 1+p+q\rvert+\lvert 8+4p+2q\rvert+\lvert 9+3p+q\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert+\lvert c\rvert\geq$ $\lvert a\pm b\pm c\rvert$
$\lvert f(1)\rvert+\lvert 2f(2)\rvert+\lvert f(3)\rvert\geq\lvert f(1)-2f(2)+f(3)\rvert=2$	
∴不成立	

问题与积累	反思
数学规纳法 标准步骤 例：证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ (n\in N^*)$ ① 当 $n=1$ 时 左 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　右 $=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 左=右　∴等式成立 ② 假设当 $n=k$ $(k\in N^*)$ 时成立 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$ ③ 当 $n=k+1$ 时 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$ $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$ $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}$ $=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}$ 结合①②　等式成立	头尾规律

问题与积累	反思
2. 证明 $1\cdot(n^2-1^2)+2\cdot(n^2-2^2)+\cdots+n(n^2-n^2)=\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+1)$	
① 当$n=1$时 左$=1\times(1^2-1^2)=0$ 右$=0$ 左=右 成立	
假设$n=k$成立	
$1\cdot(k^2-1^2)+2\cdot(k^2-2^2)+\cdots+k(k^2-k^2)=\frac{1}{4}k^2(k-1)(k+1)$	
③ $n=k+1$时	
$1\cdot(k^2+2k+1-1^2)+2\cdot(k^2-2^2+2k+1)+\cdots+k^2(k^2-k^2+2k+1)=\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{4}k^2(k-1)(k+1)+\frac{(2k+1)(k+1)k}{2}$	每项多了$2k+1$
$=\frac{1}{4}k\cdot k(k-1)(k+1)+\frac{1}{4}\cdot 2k(k+1)(2k+1)$	
$=\frac{1}{4}k(k+1)[(k-1)+2(2k+1)]$	
$=\frac{1}{4}k(k+1)(k^2+3k+2)$	
$=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+1)$	
$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+1-1)(k+1+1)$	

积累知识，提高能力，冲刺满分！

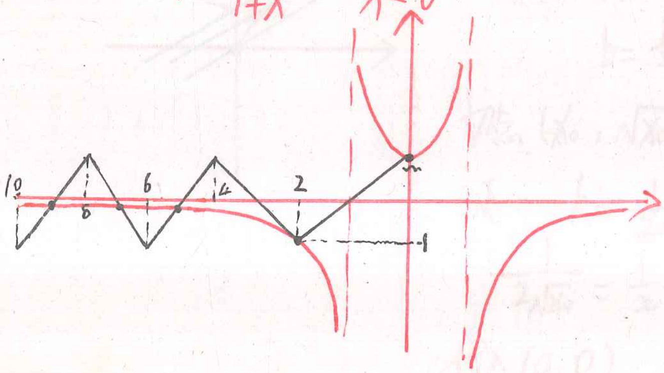
问题与积累	反思
已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=1-x$，则方程 $f(x)=\frac{1}{1-\lvert x\rvert}$ 在 $[-10,10]$ 上的解个数为 9个	静心，变换画图

$f(-x)$　$T=4$

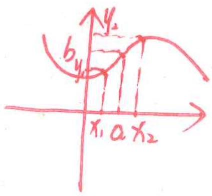
$f(-x)=f(x)=f(4-x)$?

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x>0 \\ \frac{1}{1+x} & x<0\end{cases}$

$\frac{1}{-(x-1)} \Leftarrow \frac{1}{-x}$



对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”，某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心. 给定函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，请你根据上面探究结果，计算 $f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+f\left(\frac{3}{2016}\right)+\cdots+f\left(\frac{2015}{2016}\right)=$ 2015



$x_1+x_2=2a$

$\Downarrow$

$y_1+y_2=2b$

拐点 $(\frac{1}{2},1)$　倒叙相加

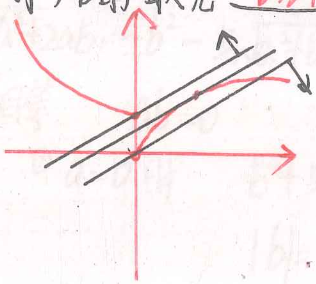
$f(\frac{1}{2016})+\cdots+f(\frac{2015}{2016})$

$f(\frac{2015}{2016})+\cdots+f(\frac{1}{2016})$

$\Rightarrow$ 2015对　$\frac{2015\times2}{2}$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
零点问题 ⇒ 分为两个函数找交点（或只把参数提到一边）易画图函数	
已知 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x\le 0)\\ \sqrt{x} & (x>0)\end{cases}$，$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x-b$ 有且仅有一个零点时，b的取范 $b\ge 1$ 或 $b=\frac{1}{2}$ 或 $b\le 0$	
	
$f(x)=\frac{1}{2}x+b$	
代入 $(0,1)$	
$b=1$　$b\ge 1$	找极限
切点 $(x_0,\sqrt{x_0})$	静心
$k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$　代入 $(1,1)$	
$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}$　$x_0=1$	$b=\frac{1}{2}$
代入 $(0,0)$　$b=0$	

平时多努力一分，考试多收获一分！

问题与积累	反思
复数的几何意义　3.21 重新起程！	

复数的几何意义　3.21 重新起程！

1. 研究方程 $x^2-5|x|+6=0$ 在复数集上解的个数

设 $x=a+bi$

$a^2+2abi-b^2-5\sqrt{a^2+b^2}+6=0$

复数相等　$ab=0$

① $a=0$ 时　$b^2+5|b|-6=0$

$|b|=-6$ 或 1　$\therefore b=\pm1$

② $b=0$ 时　$a^2-5|a|+6=0$

实数　$|a|=2$ 或 3　$\therefore a=\pm2$ 或 ±3

综上 有6个解 分别为 $\pm2, \pm3, \pm i$

反思：

复数根成对出现

求根公式成立韦定不成立

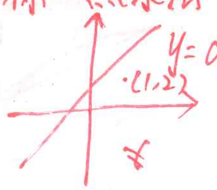
区分 $z=a+bi\ (a,b\in R)$

$z^2=a^2+2abi-b^2$

$|z|^2=a^2+b^2$

关于直线对称两点求法

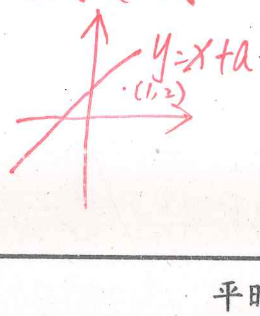
① 一般法



设对称点为 (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \frac{1+x_0}{2}a+b=\frac{2+y_0}{2} & \text{中点在轴上} \\ \frac{|a+b-2|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|ax_0+b-y_0|}{\sqrt{1+a^2}} & \text{到轴距等} \end{cases}$$

② 针对 $k=\pm1$



$x=y-a$

$x_0=2-a$

$y_0=1+a$

问题与积累	反思

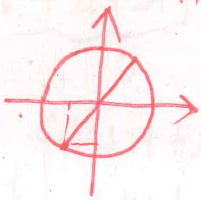
3. 已知复数 $|z|=2$，求复数 $1+\sqrt{3}i+z$ 的模的最大值最小值

设 $z=a+bi$

$a^2+b^2=4$

$1+\sqrt{3}i+a+bi$

$\sqrt{(a+1)^2+(b+\sqrt{3})^2}$



$(a+1)^2+(b+\sqrt{3})=r^2$

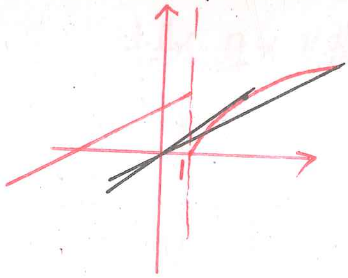
最大4　最小~~x~~ 0

两圆相切或相交

画图
找点到圆距离

吉汉

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+1 & (x\le 1)\\ \ln x & (x>1)\end{cases}$ 则方程 $f(x)=ax$ 恰有两个不同实根，a 的取范 $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{e}\right)$



切点 $(x_0, \ln x_0)$

$\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$　$k=\frac{1}{e}$

$x_0=e$

平行 $\frac{1}{4}$　否则在左边有一个交点

数形结合
图画，标准

2/13

积累知识，提高能力，冲刺满分！

3月22日　　问题与积累　　反思

复数几何意义

已知关于t的一元二次方程

$t^2+(2+i)t+2xy+(x-y)i=0\ (x,y\in R)$

(1) 当方程有实根实求x,y轨迹

$\underbrace{t^2+2t+2xy}_{0}+(\underbrace{x-y+t}_{0})i=0$　$\boxed{\text{复数相等}}$

数形结合

消t $\begin{cases} t^2+2t+2xy=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$　$(y-x)^2+2y-2x+2xy=0$

$y^2+x^2+2y-2x=0$

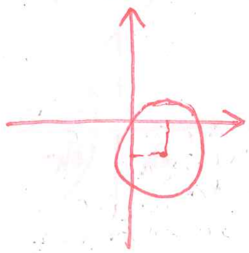
$(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 圆

确定方程

(2) 求方程有实根取范 ⇒ t

x,y 满足上面条件

t=x 且x,y满足圆方程取交集　相交



$d=\dfrac{|2+t|}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2}$

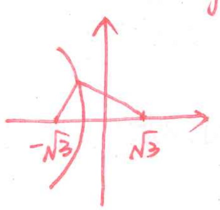
$|2+t|\le 2$

$-2\le 2+t\le 2$

$-4\le t\le 0$

平时多努力一分，考试多收获一分！

积累知识，提高能力，冲刺满分！

问题与积累	反思
2.若方程 $x^2+(m+2i)x+(2+mi)=0$，至少有一个实数根求m值	不可用Δ
复数等 设有实数根为x_0	因求根公式中b仍有i且不是确切范围
$x^2+mx+2+(2x+m)i=0$	
$\begin{cases}2x_0+m=0\\ x_0^2+mx_0+2=0\end{cases}$　　$\cancel{x}$ $m=\pm2\sqrt{2}$	
设复数z满足 $\lvert z-1\rvert=\lvert z+i\rvert$，且 $\lvert z-\sqrt{3}\rvert-\lvert z+\sqrt{3}\rvert=2$	
设 $z=x+yi$	
$\lvert x+yi-1\rvert=\lvert x+yi+1\rvert$	
$x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+y^2$	
$x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2$	
$x=-y$	
$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}-\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+b^2}=2$	点到两点距离之差为定值 双曲线
 $\Downarrow$	
$\begin{cases}x-\frac{y^2}{2}=1\\ x=-y\end{cases}$　　$x=\pm\sqrt{2}$　$y=\pm\sqrt{2}$	
$\therefore z=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$	

平时多努力一分，考试多收获一分！

3月23日　问题与积累	反思
复数二次方程	
已知 $x^2-(3-2i)x-6i=0$	
(1) 若 $x\in R$，求 x 的值　复数相等	
$x^2-3x+(2x-6)i=0$	韦达，Δ 只适用于实系数问题
$\begin{cases} x^2-3x=0 \\ 2x-6=0 \end{cases}$　$x=3$	
(2) 若 $x\in C$，求 x 的值	复数包含实数
法一：$x=a+bi$	
$(a^2-b^2-3a-2b)+(2ab-3b+2a-6)i=0$	
$\begin{cases} a^2-b^2-3a-2b=0 \\ 2ab-3b+2a-6=0 \end{cases}$　$a=3\ b=0$ 一定包含	
∴ 当 $b=0$ 时	
$a^2-3a=0 \Rightarrow$ 一定 $a=3$ 或 $a=0$	
∴ 当 $a=0$ 时　$b=-2$　∴ $x=3$ 或 $-2i$	

问题与积累	反思

2. 已知 $2z+|z|=2+6i$，求 z

设 $z=a+bi$

$2a+2bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i$

$b=3$

$2a+\sqrt{a^2+9}=2$

$\sqrt{a^2+9}=2-2a>0$　$a<1$

$\therefore a=\frac{4\pm\sqrt{31}}{3}$　舍 $a=\frac{4+\sqrt{31}}{3}$

3. 对于 $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 结论成立的是

z 是 ①　$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$

$\underbrace{i^{50}}_{-1}+\underbrace{i^{100}}_{1}$

4. 已知 $f(x)=-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$，则 $f\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$ $\underline{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$　$=-(x-1)^5$

反思：二项式定理

$=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$

$=-\omega^5=-\omega^2=-\overline{\omega}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$