****【高考地位】

解含参一元二次不等式，常涉及对参数的分类讨论以确定不等式的解，这是解含参一元二次不等式问题的一个难点. 在高考中各种题型多以选择题、填空题等出现，其试题难度属中高档题.

【方法点评】

类型一 根据二次项系数的符号分类

使用情景：参数在一元二次不等式的最高次项

解题模板：第一步 直接讨论参数大于0、小于0或者等于0；

第二步 分别求出其对应的不等式的解集；

第三步 得出结论.

例1 已知关于的不等式.

（1）若不等式的解集为，求的值．

（2）求不等式的解集

【答案】（1）（2）①当时，或②当时，③当时，④当时，⑤ 当时，原不等式解集为



（2）第一步，直接讨论参数大于0、小于0或者等于0：

不等式为，即

第二步，分别求出其对应的不等式的解集：

当时，原不等式的解集为；

当时，方程的根为；

所以当时，；

②当时，，

③当时，，

④当时，，学\*科网

第三步，得出结论：

综上所述，原不等式解集为①当时，或；②当时，

③当时，；④当时，；⑤当时，原不等式解集为.

考点：一元二次不等式的解法.

【点评】（1）本题考察的是一元二次不等式和一元二次方程的关系，由题目所给条件知的两根为，且，根据根与系数的关系，即可求出的值．（2）本题考察的是解含参一元二次不等式，根据题目所给条件和因式分解化为，然后通过对参数进行分类讨论，即可求出不等式的解集．学\*科网

【变式演练1】【河南省平顶山市2017-2018学年期末调研考试高二理科数学】若不等式

$ax^{2}+2ax−4<2x^{2}+4x$ 对任意实数$x$ 均成立，则实数$a$ 的取值范围是（ ）[来源:学科网ZXXK]

A． $(−2 ，  2)$ B． $(−\infty  ，  −2)∪(2 ，  +\infty )$ C． $(−2 ，  2]$ D． $(−\infty  ，  2]$

【答案】C



【变式演练2】已知：和是方程的两个实根，不等式对任意实数恒成立；：不等式有解，若为真，为假，求的取值范围．

【答案】

∴，∴，

∴不等式有解时，

∴假时的范围为，②[来源:学科网ZXXK]

由①②可得的取值范围为．学\*科网[来源:学科网]

考点：命题真假性的应用

类型二 根据二次不等式所对应方程的根的大小分类

使用情景：一元二次不等式可因式分解类型

解题模板：第一步 将所给的一元二次不等式进行因式分解；

第二步 比较两根的大小关系并根据其大小进行分类讨论；

第三步  得出结论.

例2 解关于的不等式（为常数且）.[来源:Z§xx§k.Com]

【答案】时不等式的解集为； 时不等式的解集为；时不等式的解集为；时不等式的解集为.

若，，不等式的解集为学\*科网

试题分析：,先讨论时不等式的解集；当时，讨论与的大小，即分，，分别写出不等式的解集即可.

考点：1.一元二次不等式的解法；2.含参不等式的解法.

【变式演练3】已知，解关于x的不等式．

【答案】当时，；当时，；当时，．

考点：一元二次不等式．

【变式演练4】【2018重庆高三理科数学不等式单元测试卷】已知0<b<1+a，若关于x的不等式（x－b）2>（ax）2的解集中的整数恰有3个，则（ ）

A． －1<a<0 B． 0<a<1 C． 1<a<3 D． 3<a<6

【答案】C

【解析】由，整理可得（1－）－2bx+>0，由于该不等式的解集中的整数恰有3个，则有1－<0，此时>1，而0<b<1+a，故a>1，

由不等式<0解得

即要使该不等式的解集中的整数恰有3个，那么－3<<－2，由<－2得－b<－2（a－1），则有a<+1，即a<+1<+1，解得a<3，由－3<得3a－3>b>0，解得a>1，则1<a<3．学&科网

类型三 根据判别式的符号分类

使用情景：一般一元二次不等式类型

解题模板：第一步 首先求出不等式所对应方程的判别式；

第二步 讨论判别式大于0、小于0或等于0所对应的不等式的解集；[来源:学科网]

第三步 得出结论.

例3 设集合A={*x*|*x*2＋3*k*2≥2*k*(2*x*－1)}，B={*x*|*x*2－(2*x*－1)*k*＋*k*2≥0}，且AB，试求*k*的取值范围．

【答案】

【解析】第一步，首先求出不等式所对应方程的判别式：

B中的不等式不能分解因式，故考虑判断式，

(1)当*k*=0时，.

(2)当*k*＞0时，△＜0，x.

(3)当*k*＜0时，.



第三步，得出结论：

综上所述，k的取值范围是：

【点评】解含参的一元二次不等式，可先分解因式，再讨论求解，若不易分解，也可对进行分类，或利用二次函数图像求解.对于二次项系数不含参数且不能因式分解时，则需对判别式的符号分类.

【变式演练5】在区间上,不等式有解，则的取值范围为（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

考点：一元二次不等式定区间定轴问题.

【变式演练6】【2018湖北襄阳四中高三六月全真模拟一数学（文）试卷】若存在$x\in [−2,3]$，使不等式$2x−x^{2}\geq a$成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A． $(−\infty ,1]$ B． $(−\infty ,−8]$ C． $[1,+\infty )$ D． $[−8,+\infty )$

【答案】A

【解析】

试题分析：设$f(x)=2x−x^{2}=−(x−1)^{2}+1\leq 1$，因为存在，使不等式$2x−x^{2}\geq a$成立，可知，所以，故选A．学.科网

考点：不等式恒成立问题．

【高考再现】

1.【2015高考江苏，7】不等式的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】[来源:学科网ZXXK]

【解析】由题意得：，解集为

【考点定位】解指数不等式与一元二次不等式

【名师点晴】指数不等式按指数与1的大小判断其单调性，决定其不等号是否变号；对于一元二次方程的解集，先研究，按照，，三种情况分别处理，具体可结合二次函数图像直观写出解集. 学科\*网

2.【2012年福建卷】已知关于x的不等式x2－ax＋2a＞0在R上恒成立，则实数a的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_．[来源:学+科+网]

【答案】（0,8）

【解析】试题分析：因为不等式x2-ax+2a＞0在R上恒成立．

∴△=（-a）2-8a＜0，解得0＜a＜8

故答案为：（0，8）

考点：一元二次不等式的应用，以及恒成立问题

 3.【2015高考广东，文11】【2008年高考广东卷理科数学试题】已知若关于的方程有实根，则的取值范围是 。

【答案】

【解析】本题考查二次方程有关知识与绝对值不等式知识的综合应用；由于关于的二次方程有实根，那么即，而，从而，解得。

4.【2015高考上海，文16】 下列不等式中，与不等式解集相同的是（ ）.

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B[来源:学科网ZXXK]

【考点定位】同解不等式的判断.

【名师点睛】求解本题的关键是判断出. 本题也可以解出各个不等式，再比较解集.此法计算量较大.

【反馈练习】

1．已知函数$f(x)=x^{2}+ax+b$，集合$A=\{x|f(x)\leq 0\}$，集合$B=\{x|f(f(x))\leq \frac{5}{4}\}$，若$A=B\ne ∅$，则实数$a$的取值范围是（ ）

A． $[\sqrt{5},5]$ B． $[−1,5]$ C． $[\sqrt{5},3]$ D． $[−1,3]$

【来源】【全国市级联考】浙江省嘉兴市2018届高三4月模拟测试数学试题

【答案】A



点睛：本题考查二次函数的性质，考查函数的值域，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题；设集合$B=\{x|f(f(x))\leq \frac{5}{4}\}=\{x|m\leq f(x)\leq n\}$，根据一元二次不等式的解与一元二次方程根的关系结合$A=B\ne ∅$，得出$b$和$m=−a$，即可求出实数$a$的取值范围.

2．设： ， ： ，若是的必要不充分条件，则实数的取值范围为（ ）

A．  B．  C．  D． 

【来源】2018年普通高校招生全国卷 一（A） 【衡水金卷】高三信息卷 （四）理科数学试题

【答案】D[来源:学.科.网Z.X.X.K]

【解析】设： 的解集为A，所以A={x|-2≤x＜0或0＜x≤2},设： 的解集为B，所以B={x|m≤x≤m+1},由题知p是q的必要不充分条件，即得B是A的真子集，所以有

综合得m∈，故选D. 学\*科网

3．已知集合， ，若，则的值为（ ）

A． 1 B． -1 C．  D． 2

【来源】【全国市级联考word】湖南省张家界市2018届高三第三次模拟考试数学（文）试题

【答案】A

【解析】由， ，且，得，又由，则必有，且，所以.故选A.

4．若关于$x$的方程$(lnx−ax)lnx=x^{2}$存在三个不等实根，则实数$a$的取值范围是

A． $(−\infty ,\frac{1}{e^{2}}−\frac{1}{e})$ B． $(\frac{1}{e^{2}}−\frac{1}{e},0)$ C． $(−\infty ,\frac{1}{e}−e)$ D． $(\frac{1}{e}−e,0)$

【来源】【全国市级联考】吉林省长春市普通高中2018届高三质量监测（二）数学（文）试题

【答案】C




∵关于$x$的方程$(lnx-ax)lnx=x^{2}$存在三个不等实根，

∴方程$t^{2}−at−1=0$有两个根，且一正一负，且正根在区间$(0,\frac{1}{e})$内．

令$g(t)=t^{2}−at−1=0$，

则有$\left\{\begin{array}{c}g(0)=−1<0\\g(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^{2}}−\frac{a}{e}−1>0\end{array}\right $，解得$a<\frac{1}{e}−e$．

∴实数$a$的取值范围是$(−\infty ,\frac{1}{e}−e)$．选C．

点睛：

解答本题时，根据所给函数的特征并利用换元的方法将问题化为方程根的问题处理，然后结合二次方程根的分布情况再转化成不等式的问题解决．对于本题中的$t^{2}−at−1=0$根的情况，还要根据数形结合根据两函数图象交点的个数来判断．

5．若“$0<x<1$”是“$(x−a)[x−(a+2)]\leq 0$”的充分而不必要条件，则实数$a$的取值范围是（ ）

A． $[−1,0]$ B． $(−1,0)$

C． $(−\infty ,0]∪[1,+\infty )$ D． $(−\infty ,−1)∪(0,+\infty )$

【来源】2018浙江省高三第二次五校联考理科数学试卷

【答案】A



考点：充分必要条件.

6．不等式*ax*2＋*bx*＋2＞0的解集是$(−\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则*a*＋*b*的值是(　　)

A． 10 B． －10 C． －14 D． 14

【来源】2018学年山东省兖州市高二上学期期中数学试卷

【答案】C

【解析】

试题分析：根据题意，由于不等式ax2＋bx＋2＞0的解集是$(−\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，那么说明了是ax2＋bx＋2=0的两个根，然后利用韦达定理可知则a＋b的值是-14，故选C. 学科!网

考点：一元二次不等式的解集

点评：主要是考查了二次不等式的解集的运用，属于基础题。

7．已知$a>b$，二次三项式$ax^{2}+4x+b\geq 0$对于一切实数$x$恒成立，又$∃x\_{0}\in R$，使$ax\_{0}^{2}+4x\_{0}+b=0$成立，则$\frac{a^{2}+b^{2}}{a−b}$的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【来源】【全国校级联考】天津市十二校2018年高三二模联考数学(理)试题

【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】分析：$x^{2}+4x+b\geq 0$对于一切实数$x$恒成立，可得$ab\geq 4$；再由$∃x\_{0}\in R$，使$ax\_{0}^{2}+4x\_{0}+b=0$成立，可得$ab\leq 4$，所以可得$ab=4$，$\frac{a^{2}+b^{2}}{a-b}$可化为$\frac{a^{2}+\frac{16}{a^{2}}}{a−\frac{4}{a}}$，平方后换元，利用基本不等式可得结果.



点睛：本题主要考查一元二次不等式恒成立问题以及利用基本不等式求最值，属于难题.利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是，首先要判断参数是否为正；二定是，其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是，最后一定要验证等号能否成立（主要注意两点，一是相等时参数否在定义域内，二是多次用$\geq $或$\leq $时等号能否同时成立）.

8．若$A=\left\{x\left|ax^{2}−ax+1\leq 0,x\in R\right \right\}=ϕ$，则$a$的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_.

【来源】【全国市级联考】安徽省淮南市2018届高三第一次（2月）模拟考试数学（文）试题

【答案】$\left[0,4\right)$

【解析】当$a=0$时，显然成立；

当$a>0$时，$Δ=a^{2}−4a<0$，得$0<a<4$；

综上，$a$的取值范围是$\left[0,4\right)$。

12．12．不等式的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【来源】【全国校级联考】全国名校大联考2017-2018年度高三第三次联考数学（理）试题

【答案】{*x|-a*＜*x*＜*3a*}

【解析】，因为， ,不等式的解集为，故答案为.

9．已知不等式的解集为,则不等式的解集为 .

【来源】【百强校】2018安徽师大附中学高三上学期期中数学（文）试卷

【答案】

【解析】



考点：一元二次不等式的解法.

10．设命题$p：$实数$x$满足$x^{2}-2ax-3a^{2}<0(a>0)$，命题$q：$实数$x$满足$\frac{2-x}{x-4}\geq 0$．

（I）若$a=1$，$p∧q$为真命题，求$x$的取值范围；

（II）若$¬p$是$¬q$的充分不必要条件，求实数$a$的取值范围．

【来源】【全国校级联考】河南省豫南九校2017-2018学年下学期高二第二次联考数学（理）试题

【答案】（I）$[2，3)$；（II）$[\frac{4}{3}，+\infty )$．

【解析】

分析：（1）将问题转化为当$a=1$时求不等式组的解集的问题．（2）将$¬p$是$¬q$的充分不必要条件转化为两不等式解集间的包含关系处理，通过解不等式组解决．学&科网

详解：（1）当$a=1$时，

由$x^{2}-2x-3<0$得$−1<x<3$，

由$\frac{2-x}{x-4}\geq 0$得$2\leq x<4$，

∵$p∧q$为真命题，

∴命题$p,q$均为真命题，

∴$\left\{\begin{array}{c}-1<x<3,\\2\leq x<4,\end{array}\right $解得$2\leq x<3$，

∴实数$x$的取值范围是$[2,3)$．



点睛：根据充要条件求解参数的范围时，可把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合间的关系，由此得到不等式（组）后再求范围．解题时要注意，在利用两个集合之间的关系求解参数的取值范围时，不等式是否能够取等号决定端点值的取舍，处理不当容易出现漏解或增解的现象．

11．（1）关于的不等式的解集非空，求实数的取值范围；

【来源】【全国校级联考】河南省豫南九校17-18学年高二上学期期末联考理科数学试题

【答案】(1) 

【解析】试题分析：（1）要使关于的不等式的解集非空，只需，解不等式可得结果；（2），利用基本不等式可求得实数的取值范围.

试题解析：（1）设．则关于的不等式的解集不是空集 在R上能成立，即解得

或．（或由的解集非空得亦可得）