

【高考地位】

基本不等式是《不等式》一章重要内容之一，是求函数最值的一个重要工具，也是高考常考的一个重要知识点。应用基本不等式求最值时，要把握基本不等式成立的三个条件“一正二定三相等”，忽略理任何一个条件，就会导致解题失败，因此熟练掌握基本不等式求解一些函数的最值问题的解题策略是至关重要的。

【方法点评】

方法一 凑项法

使用情景：某一类函数的最值问题

解题模板：第一步 根据观察已知函数的表达式，通常不符合基本不等式成立的三个条件“一正二定三相等”，将其配凑（凑项、凑系数等）成符合其条件；

 第二步 使用基本不等式对其进行求解即可；

第三步 得出结论.

例1 已知，求函数的最大值。

【答案】.



第三步，得出结论：

故当时，。学#科网[来源:学。科。网Z。X。X。K]

点评：本题需要调整项的符号，又要配凑项的系数，使其积为定值。

【变式演练1】【江苏省盐城市阜宁中学2017-2018学年高二上学期第一次学情调研数学（文）试题】函数的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】-2

【解析】，

当且仅当，即时，“＝”成立

【变式演练2】【2018届山西高三上期中数学（理）试卷】当时，不等式恒成立，则实数的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】



考点：均值不等式．

方法二 分离法

使用情景：某一类函数的最值问题

解题模板：第一步 首先观察已知函数的表达式的特征，如分子（或分母）是二次形式且分母（或分子）是一次形式；

 第二步 把分母或分子的一次形式当成一个整体，并将分子或分母的二次形式配凑成一次形式的二次函数形式；

 第三步 将其化简即可得到基本不等式的形式，并运用基本不等式对其进行求解即可得出所求的结果.

例2 求的值域。

【答案】详见解析.



【方法点晴】本题看似无法运用基本不等式，不妨将分子配方凑出含有（*x*＋1）的项，再将其分离。分式函数求最值，通常直接将分子配凑后将式子分开或将分母换元后将式子分开再利用不等式求最值。即化为，*g*(*x*)恒正或恒负的形式，然后运用基本不等式来求最值。

【变式演练3】求函数的最值。

【答案】详见解析.

【解析】

试题分析：上述解题过程中应用了均值不等式，却忽略了应用均值不等式求最值时的条件，两个数都应大于零，因而导致错误。因为函数的定义域为，所以必须对的正负加以分类讨论。[来源:学\_科\_网Z\_X\_X\_K]



方法三 函数法

使用情景：在应用最值定理求最值时，若遇等号取不到的情况

解题模板：第一步 运用凑项或换元法将所给的函数化简为满足基本不等式的形式；

 第二步 运用基本不等式并检验其等号成立的条件，若等号取不到则进行第三步，否则，直接得出结果即可；

 第三步 结合函数的单调性，并运用其图像与性质求出其函数的最值即可；

 第四步 得出结论.

例3 求函数的值域。

【答案】详见解析.

【解析】第一步，运用凑项或换元法将所给的函数化简为满足基本不等式的形式：

令，则，学\*科网

第二步，运用基本不等式并检验其等号成立的条件，若等号取不到则进行第三步，否则，直接得出结果即可：

因，但解得不在区间，故等号不成立，考虑单调性，

第三步，结合函数的单调性，并运用其图像与性质求出其函数的最值即可：

因为在区间单调递增，所以在其子区间为单调递增函数，

第四步 得出结论.

故，所以函数的值域为。

【变式演练4】下列函数中，最小值为4的是（ ）

A．

B．（）

C．

D．

【答案】C

【解析】

试题分析：，当且仅当时等号成立，故选C.

考点：基本不等式．

【高考再现】

1. 【2018年江苏卷】在$△ABC$中，角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$∠ABC=120°$，$∠ABC$的平分线交$AC$于点*D*，且$BD=1$，则$4a+c$的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】9

【解析】分析：先根据三角形面积公式得条件、再利用基本不等式求最值.



点睛：在利用基本不等式求最值时，要特别注意“拆、拼、凑”等技巧，使其满足基本不等式中“正”(即条件要求中字母为正数)、“定”(不等式的另一边必须为定值)、“等”(等号取得的条件)的条件才能应用，否则会出现错误.

2. 【2015高考湖南，文7】若实数满足，则的最小值为( )

A、 B、2 C、2 D、4

【答案】C

【解析】，（当且仅当时取等号），所以的最小值为，故选C. 学科%网

【考点定位】基本不等式

【名师点睛】基本不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能，因此可以用在一些不等式的证明中，还可以用于求代数式的最值或取值范围．如果条件等式中，同时含有两个变量的和与积的形式，就可以直接利用基本不等式对两个正数的和与积进行转化，然后通过解不等式进行求解．

3. 【2015高考福建，文5】若直线过点，则的最小值等于（ ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】C



【考点定位】基本不等式．

【名师点睛】本题以直线方程为背景考查基本不等式，利用直线过点寻求变量关系，进而利用基本不等式求最小值，要注意使用基本不等式求最值的三个条件“正，等，定”，属于中档题．

4. 【2018年天津卷】已知$a , b\in R$，且$a−3b+6=0$，则$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}$的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】

由题意首先求得*a*-3*b*的值，然后结合均值不等式的结论整理计算即可求得最终结果，注意等号成立的条件.

【详解】

由$a-3b+6=0$可知$a-3b=-6$，

且：$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}=2^{a}+2^{-3b}$，因为对于任意*x*，$2^{x}>0$恒成立，

结合均值不等式的结论可得：$2^{a}+2^{-3b}\geq 2×\sqrt{2^{a}×2^{-3b}}=2×\sqrt{2^{-6}}=\frac{1}{4}$.

当且仅当$\left\{\begin{array}{c}2^{a}=2^{-3b}\\a-3b=6\end{array}\right $，即$\left\{\begin{array}{c}a=-3\\b=1\end{array}\right $时等号成立.

综上可得$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}$的最小值为$\frac{1}{4}$.

【点睛】

在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误．

5. 【2015高考天津，文12】已知 则当*a*的值为 时取得最大值.

【答案】4



【考点定位】本题主要考查对数运算法则及基本不等式应用.

【名师点睛】在利用基本不等式求最值时,一定要紧扣“一正、二定、三相等”这三个条件,注意创造“定”这个条件时常要对所给式子进行拆分、组合、添加系数等处理,使之可用基本不等式来解决,若多次使用基本不等式,必须保持每次取等的一致性.

6. 【2018年天津卷】已知*a*，*b*∈R，且*a*–3*b*+6=0，则2*a*+$\frac{1}{8^{b}}$的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】分析：由题意首先求得*a*-3*b*的值，然后结合均值不等式的结论整理计算即可求得最终结果，注意等号成立的条件. 学科&网

详解：由$a−3b+6=0$可知$a−3b=−6$，

且：$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}=2^{a}+2^{−3b}$，因为对于任意*x*，$2^{x}>0$恒成立，

结合均值不等式的结论可得：$2^{a}+2^{−3b}\geq 2×\sqrt{2^{a}×2^{−3b}}=2×\sqrt{2^{−6}}=\frac{1}{4}$.

当且仅当$\left\{\begin{array}{c}2^{a}=2^{−3b}\\a−3b=6\end{array}\right $，即$\left\{\begin{array}{c}a=3\\b=−1\end{array}\right $时等号成立.

综上可得$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}$的最小值为$\frac{1}{4}$.

点睛：在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误．

【反馈练习】

1．【安徽省蒙城县2018届高三上学期“五校”联考数学（文）试题】已知正项等比数列满足，若存在两项使得，则的最小值为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B



2.【辽宁省沈阳市东北育才学校2018届高三第三次模拟考试数学（理）试题】

设分别为双曲线的左、右顶点， 是双曲线上不同于的一点，设直线的斜率分别为，则取得最小值时，双曲线的离心率为（　 　）

A．  B．  C．  D． 

【答案】C

【解析】设， ，点P在双曲线上，得，所以，即

  

设函数， ,所以f(x)在区间单调递减，在区间单调递增。，即,又均值不等式等号成立条件当且仅当，所以.选C.

【点睛】

（1）双曲线上任意关于原点对称的两点，另一动点，则

（2）椭圆上任意关于原点对称的两点，另一动点，则

3．【新疆维吾尔自治区2018届高三第二次适应性（模拟）检测数学（文）试题】设， ， ，则的最小值为（ ）

A．  B．  C．  D． 

【答案】A



4.【贵州省凯里市第一中学2018届高三下学期《黄金卷》第二套模拟考试数学（理）试题】函数的最小值为（ ）

A． 3 B． 4 C． 6 D． 8

【答案】B

【解析】

故选学科#网

5．【2018届重庆市第一中学高三理12月月考数学试卷】设，，且，则的最大值为（ ）

A． B．6

C．-6 D．

【答案】D

【解析】



考点：基本不等式．

【易错点睛】本题主要考查了基本不等式．基本不等式求最值应注意的问题：(1)使用基本不等式求最值，其失误的真正原因是对其前提“一正、二定、三相等”的忽视．要利用基本不等式求最值，这三个条件缺一不可．(2)在运用基本不等式时，要特别注意“拆”“拼”“凑”等技巧，使其满足基本不等式中“正”“定”“等”的条件．

6．【衡水金卷2018年普通高等学校招生全国统一考试 分科综合卷 理科数学（二）模拟试题】已知恒成立，若为真命题，则实数的最小值为（ ）[来源:Zxxk.Com]

A． 2 B． 3 C． 4 D． 5

【答案】A

【解析】化为，即有，又时， 的最小值为2，故由存在性的意义知.故实数的最小值为2.[来源:Zxxk.Com]

故选：A

7．【滨海新区七所重点学校2018届高三毕业班联考数学（理）试题】若正实数， ，满足，则的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】分析：将题中的式子进行整理，将当做一个整体，之后应用已知两个正数的整式形式和为定值，求分式形式和的最值的问题的求解方法，即可求得结果.



点睛：该题属于应用基本不等式求最值的问题，解决该题的关键是需要对式子进行化简，转化，利用整体思维，最后注意此类问题的求解方法-------相乘，即可得结果.

8．【上海市金山区2018届高三下学期质量监控（二模）数学试题】函数，x(0，+∞)的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】6

【解析】根据均值不等式知，当且仅当时等号成立，故填6.

9．【安徽省宣城市2018届高三第二次调研测试数学文试题】已知函数，若正实数满足，则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】因为，所以函数为单调递增奇函数，因此由，得学科.网

因此 ，当且仅当时取等号.

点睛：在利用基本不等式求最值时，要特别注意“拆、拼、凑”等技巧，使其满足基本不等式中“正”(即条件要求中字母为正数)、“定”(不等式的另一边必须为定值)、“等”(等号取得的条件)的条件才能应用，否则会出现错误.[来源:学科网]

10．【河北省衡水第一中学2018届高三上学期分科综合考试数学（文）试题】

若都是正数，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】.



【易错点晴】本题主要考查利用基本不等式求最值，属于难题.利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是，首先要判断参数是否为正；二定是，其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是，最后一定要验证等号能否成立（主要注意两点，一是相等时参数否在定义域内，二是多次用或时等号能否同时成立）.

11．【江苏省南通市2018届高三上学期第一次调研测试数学试题】已知， ，求的最小值.

【答案】8

【解析】试题分析：根据基本不等式得， ，再两式相加即得.即可得最小值

试题解析：因为， ，

所以， .

两式相加：  ，

所以.

当且仅当且时“”成立.

即时， 取得最小值.

12．【全国名校大联考2017-2018年度高三第三次联考数学（理）试题】

已知函数．

（1）若，且，求的最大值；

（2）当时， 恒成立，且，求的取值范围．

【答案】（1）；（2）.

【解析】试题分析：（1）由可得，利用基本不等式即可求得的最大值；（2）当时， 恒成立等价于，利用线性规划求解，画出可行域，要求的范围，先根据可行域以及经过两点的斜率公式求经过两点与的直线的斜率的取值范围是，从而可得结果. 学科\*网

试题解析：（1） ∵， ，

∴，即，∴， ， ，

∵， ，当且仅当时等号成立，

即．



